CORRECTION DU TD 4 : INTRODUCTION A LA THÉORIE DES DISTRIBUTIONS

Contents

1. Exercice 1: Exemples et contre-exemples de distributions

Commençons par quelques rappels concernant les notions de base liées à la théorie des distributions. Pour simplifier, on se place sur $\mathbb{R}$, mais toutes les idées et objets présentés ci-dessous se généralisent au cas où l'espace ambiant est (un ouvert de) l'espace $\mathbb{R}^n$, $n > 1$.

Grossièrement, la vision "classique" d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ consiste à "regarder la valeur $f(x)$ prise par f en chaque point x". Au contraire, la théorie des distributions propose de "comprendre une fonction f" à travers ses "moyennes"

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

pondérées par un grand nombre de "poids" φ, que l'on appellera *fonctions test* par la suite.

Lorsque la fonction f est "assez régulière", ces deux points de vue sont équivalents : si l'on connaît les valeurs de f en tout point de $\mathbb{R}$, il est facile de calculer les moyennes ci-dessus. Réciproquement, si l'on connaît les moyennes de f contre des fonctions test φ de plus en plus resserrées autour de chaque point $x_0 \in \mathbb{R}$, on pourra retrouver la valeur de f en x_0, voir la Figure 1.

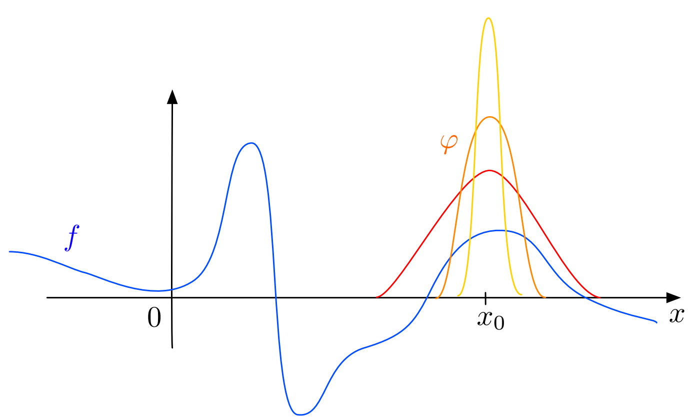

Figure 1. *On peut retrouver la valeur $f(x_0)$ en x_0 d'une fonction f "assez régulière" à partir des moyennes $\int_{-\infty}^{\infty} f\varphi\,\mathrm{d}x$ de f contre des fonctions test φ de plus en plus concentrées autour de x_0.*

Bien quoi moins intuitive a priori, cette nouvelle manière de comprendre les fonctions s'avère plus souple et se prête mieux à la définition de "fonctions généralisées". Pour mieux se convaincre des difficultés posées par la vision "classique" des fonctions, l'exemple historique de la "fonction de Dirac" est particulièrement instructif. Celle-ci est souvent introduite en physique comme la fonction δ telle que

$$\delta = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \{0\}\,, \quad \delta(0) = +\infty, \text{ et } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, \mathrm{d}t = 1.$$

Une telle définition n'a bien sûr aucun sens mathématique : une fonction mesurable sur $\mathbb{R}$ qui vaudrait 0 partout sauf peut-être au point $x = 0$ (un ensemble de mesure nulle) serait nécessairement d'intégrale nulle. Pourtant, de très nombreux travaux dans différents domaines (physique, traitement du signal, etc.) poussent à "définir" une telle fonction. Une seconde manière d'introduire cette fonction δ, un peu plus rigoureuse que la précédente mais pas encore pleinement satisfaisante, consiste à poser

$$\delta = \lim_{\varepsilon \to 0} g_\varepsilon, \text{ où } g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}}. \tag{2}$$

Autrement dit, δ est la limite de la suite de fonctions g_ε, qui sont toutes d'intégrale 1, et sont de plus en plus concentrées autour de 0, voir la Figure 2.

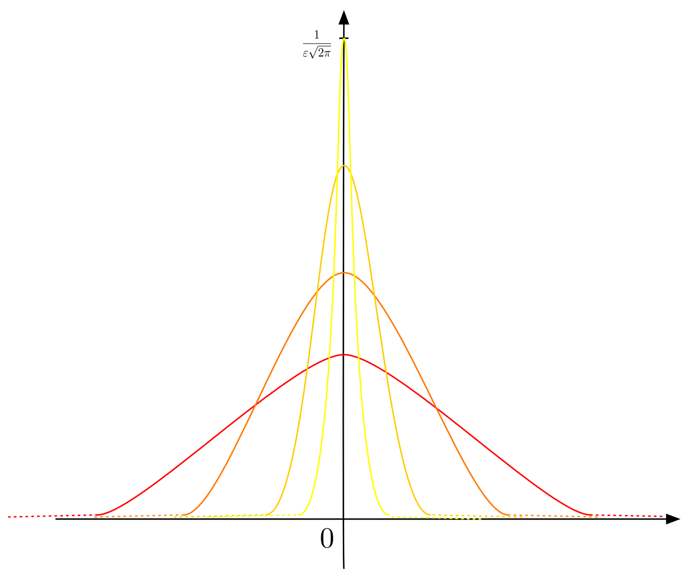

Figure 2. *Une définition "intuitive" de la distribution de Dirac comme limite d'une suite de fonctions d'intégrale* 1*, de plus en plus concentrées autour de* 0*.*

Malheureusement, ceci n'est toujours pas rigoureux, car on ne sait pas dans quel sens il faudrait comprendre le passage à la limite dans (2) : la suite g_ε ne satisfait pas les hypothèses du théorème de convergence dominée, et il est donc impossible d'utiliser la relation (2) pour passer à la limite dans une intégrale.

La théorie des "fonctions généralisées", ou *distributions*, permet de donner un cadre rigoureux à ces considérations (et à bien d'autres !). Nous verrons en particulier que toute fonction "raisonnable" peut être vue comme une distribution, mais qu'il existe de nombreuses distributions qui ne sont pas des fonctions. En particulier, cette théorie permet de définir δ comme une distribution sur $\mathbb{R}$, et le passage à la limite (2) peut être défini rigoureusement au sens des distributions.

Parmi les avantages du cadre de la théorie des distributions, que l'on découvrira plus précisément tout au long de ce cours, mentionnons les faits suivants.

- La théorie des distributions permet de donner un sens rigoureux à de nombreux objets issus de la physique, et notamment à la fameuse distribution δ de Dirac.

- La théorie des distributions est un cadre très souple pour la définition de nombreuses opérations : on verra par exemple qu'on pourra dériver n'importe quelle distribution, ou bien que le passage à la limite au sens des distributions est particulièrement aisé à manipuler.
- Elle offre un cadre rigoureux pour la transformée de Fourier.

Passons maintenant à la définition de la notion de distribution, à proprement parler. On commence par introduire l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ des fonctions test φ, qui serviront de poids dans la définition des distributions comme "moyennes".

Définition 1. *On note $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur $\mathbb{R}$, i.e.*

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \Big(\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \text{ et il existe un compact } K \subset \mathbb{R} \text{ t.q. } \ \varphi(x) = 0 \text{ pour } x \notin K\Big).$$

Notons que, bien qu'il soit assez difficile de construire explicitement une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, on peut montrer que cet espace contient en fait "suffisamment de fonctions" φ pour que la collection des moyennes de f, de la forme (1), permette de caractériser une "bonne" fonction f.

Définition 2. *Une distribution sur $\mathbb{R}$ est une application $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui est*

- *Linéaire : pour tous réels λ, $\mu \in \mathbb{R}$ et pour toutes fonctions test $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a*
$$\langle T, \lambda\varphi + \mu\psi\rangle = \lambda\langle T, \varphi\rangle + \mu\langle T, \psi\rangle.$$
- *Continue : pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$, il existe un entier p_K et une constante $C_K > 0$ (qui dépendent tous deux de K) tels que*
$$\text{Pour toute } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ dont le support supp}(\varphi) \text{ est } \subset K, \quad |\langle T, \varphi\rangle| \le C_K \sup_{p \le p_K} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi^{(p)}(x)|.$$

Remarque 1. *Cette notion de distribution sur $\mathbb{R}$ se généralise sans difficulté au cas d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$: on demande simplement à K d'être un compact de I et non plus de $\mathbb{R}$ dans la propriété de continuité de la Définition 2.*

Notons que cette propriété de continuité peut sembler abstraite a priori. Elle peut également s'exprimer en termes de suites de fonctions test (voir le polycopié), mais la forme ci-dessus est souvent mieux adaptée au calcul.

Enoncé : Dire si les applications T suivantes, définies pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ sont ou non des distributions.

(i) $\langle T, \varphi\rangle = \displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x$;

(ii) $\langle T, \varphi\rangle = \displaystyle\int_0^1 |\varphi(x)|\,\mathrm{d}x$;

(iii) $\langle T, \varphi\rangle = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n)$;

(iv) $\langle T, \varphi\rangle = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{n}\right)$.

(i): L'application T est une distribution sur $\mathbb{R}$. En effet, la linéarité de l'application $\varphi \mapsto \langle T, \varphi\rangle$ est immédiate, et on se contente ici de montrer la propriété de continuité.

Soit K un compact de $\mathbb{R}$; pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support dans K, on a :

$$\begin{aligned} |\langle T, \varphi\rangle| &= \left|\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\le \int_0^1 |\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\le \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|, \end{aligned}$$

soit la propriété de continuité recherchée avec $C_K = 1$ et $p_K = 0$. Dans ce cas particulier, p_K et C_K ne dépendent en fait pas de K.

(ii): Cette application n'est pas linéaire. Par exemple, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est non identiquement nulle sur $(0,1)$, on a

$$\langle T, -\varphi \rangle = \int_0^1 |-\varphi(x)| \, \mathrm{d}x = \langle T, \varphi \rangle,$$

alors que si T était linéaire, on devrait avoir $\langle T, -\varphi \rangle = -\langle T, \varphi \rangle$.

Ainsi, T n'est pas une distribution.

(iii): A priori, cette application semble mal définie, en raison de la somme infinie qu'elle met en jeu. En réalité, pour une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ donnée, l'expression de $\langle T, \varphi \rangle$ ne fait intervenir qu'un nombre fini d'indices. En effet, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, il existe un entier $M > 0$ (dépendant de φ) tel que $\varphi(x) = 0$ lorsque $x \notin [-M, M]$. Ainsi, on a

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n=0}^{M} \varphi(n),$$

c'est-à-dire que la somme définissant $\langle T, \varphi \rangle$ est toujours finie (bien qu'elle ne comporte pas toujours le même nombre de termes, suivant la fonction test considérée φ).

Une fois cette remarque faite, la linéarité de T est évidente : soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$; on a :

$$\begin{aligned} \langle T, \lambda\varphi + \mu\psi \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda\varphi(n) + \mu\psi(n)) \\ &= \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) + \mu \sum_{n=0}^{\infty} \psi(n) \\ &= \lambda\langle T, \varphi \rangle + \mu\langle T, \psi \rangle. \end{aligned}$$

où chaque somme ne comporte en réalité qu'un nombre fini de termes, en vertu de ce que l'on vient de dire.

Montrons à présent la continuité de T au sens des distributions. Si K est un compact de $\mathbb{R}$, K est en particulier borné, et il existe un entier $M > 0$ (qui dépend bien sûr de K) tel que $K \subset [-M, M]$. Alors, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support dans K on a $\varphi(n) = 0$ dès que $n > M$ et

$$\begin{aligned} |\langle T, \varphi \rangle| &\leq \sum_{n=0}^{M} |\varphi(n)| \\ &\leq (M+1) \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|, \end{aligned}$$

ce qui est la propriété de continuité attendue avec $p_K = 0$ et $C_K = (M+1)$. Dans cet exemple, p_K ne dépend pas de K, alors que C_K en dépend.

(iv): Cette application n'est pas une distribution : elle n'est même pas bien définie pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Par exemple, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction test valant identiquement 1 sur $[-1, 1]$. Alors, pour tout entier $n \geq 1$, on a $\varphi\left(\frac{1}{n}\right) = 1$, et la somme apparaissant dans la définition de $\langle T, \varphi \rangle$ est infinie.

Remarque 2. *En revanche, on pourrait montrer (le faire !) que cette dernière application T est bien une distribution sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$, c'est-à-dire qu'elle est bien définie sur les fonctions test à support dans les compacts qui "évitent" 0 (et elle y est linéaire et continue).*

2. Exercice 2 : Une somme infinie de fonctions, et sa convergence au sens des distributions

Comme on l'a évoqué, la théorie des distributions vise à généraliser la notion de fonction. Dans cette optique, il est crucial de bien comprendre comment on peut voir une fonction "raisonnable" comme une distribution.

Theorème et Définition 3. *Soit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$, i.e.*

$$\forall K \subset \mathbb{R} \textit{ compact }, \quad \int_K |f(x)| \, \mathrm{d}x < +\infty.$$

Alors l'application $T_f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x) \, \mathrm{d}x$$

est une distribution sur $\mathbb{R}$, appelée distribution associée à f.

Esquisse de preuve. Seule la continuité de T_f est non triviale. Soit K un compact de $\mathbb{R}$, et soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction test à support dans K. Alors on a :

$$\begin{aligned} |\langle T_f, \varphi\rangle| &= \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \int_K |f(x)||\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leq \left(\int_K |f(x)|\,\mathrm{d}x\right)\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)| \end{aligned}$$

soit la relation de continuité pour T_f avec $C_K = \int_K |f(x)|\,\mathrm{d}x$ (qui est une quantité finie puisque f est localement intégrable sur $\mathbb{R}$) et $p_K = 1$. □

Le résultat suivant est fondamental, puisqu'il permet de caractériser une fonction localement intégrable par sa distribution.

Théorème 1. *Soit f et g deux fonctions de $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, telles que $T_f = T_g$. Alors $f = g$ p. p. sur $\mathbb{R}$.*

Ainsi, deux fonctions "raisonnables" f et g (dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$) dont les moyennes $\langle T_f, \varphi\rangle$ et $\langle T_g, \varphi\rangle$ coïncident pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ sont égales. Il est donc équivalent de voir une fonction $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ comme la distribution induite T_f ; dans la suite, on notera simplement f cette distribution.

Rappelons à présent ce qu'il faut savoir de la notion de limite au sens des distributions.

Theorème et Définition 4. *Soit $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions sur $\mathbb{R}$. On suppose que pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la suite réelle $\{\langle T_n, \varphi\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite. Alors l'application T, définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ par*

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle T, \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle T_n, \varphi\rangle \tag{3}$$

est une distribution sur $\mathbb{R}$. On dit que T est la distribution limite de la suite T_n.

Remarque 3.

- *Sous l'hypothèse que la limite $\lim_{n\to\infty}\langle T_n, \varphi\rangle$ existe pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, il est facile de montrer que l'application T définie par (3) est linéaire. En revanche, il est difficile de démontrer que T est continue au sens des distributions. Cela procède d'un résultat très puissant d'analyse fonctionnelle : le théorème de Banach-Steinhaus.*
- *Pour montrer qu'une application T est limite de la suite de distributions $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, il suffit en pratique de vérifier que pour chaque $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la suite réelle $\{\langle T_n, \varphi\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel $\langle T, \varphi\rangle$, ce qui se fait au moyen de techniques classiques pour l'étude des suites réelles. Le résultat ci-dessus permettra de conclure automatiquement que T est une distribution.*

Enoncé : Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

(i) Montrer qu'il existe une constante $C(\varphi)$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{inx}\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{C(\varphi)}{1+n^2}.$$

(ii) Soit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite bornée. Montrer que la série de terme général $a_n \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{inx}\,\mathrm{d}x$ converge, et que l'application qui à φ associe la somme de cette série est une distribution.

(iii) Montrer que si la suite $\left\{n^2 a_n\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée, alors cette distribution est une distribution fonction.

(i): Il convient de distinguer les cas $n = 0$ et $n \neq 0$.

Lorsque $n \neq 0$, une intégration par parties (où l'on intègre l'exponentielle et on dérive φ) produit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{inx}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{in}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi'(x)e^{inx}\,\mathrm{d}x$$

où les termes tout intégrés s'annulent puisque φ est à support compact. En répétant ce calcul, on trouve :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{inx}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{in}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi''(x) e^{inx}\,\mathrm{d}x.$$

Pour majorer cette dernière intégrale, on utilise le fait que φ est à support dans un compact K de $\mathbb{R}$; comme K est en particulier borné, il existe un réel $M > 0$ tel que $K \subset [-M, M]$, et donc

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{inx}\,\mathrm{d}x\right| &= \frac{1}{n^2}\left|\int_{-M}^{M} \varphi''(x) e^{inx}\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \frac{1}{n^2}\int_{-M}^{M} |\varphi''(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{2M}{n^2}\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi''(x)|. \\
&\leq C\frac{2M}{1+n^2}\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi''(x)|,
\end{aligned}$$

où $C > 0$ est une borne supérieure sur les valeurs de la suite $\left\{\frac{1+n^2}{n^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Le cas $n = 0$ se traite de manière analogue: si φ est à support compact dans $K \subset [-M, M]$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_{-M}^{M} \varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \int_{-M}^{M} |\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leq 2M\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|.
\end{aligned}$$

Combinant ces deux résultats, on a prouvé le résultat suivant : il existe une constante $C > 0$ telle que, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est une fonction test à support dans $K \subset [-M, M]$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{inx}\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{CM}{1+n^2}\sup_{x\in\mathbb{R}} \max(|\varphi(x)|, |\varphi''(x)|).$$

Remarque 4. *En répétant cet argument, on montrerait en fait que, si ψ est une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$, on a*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{inx}\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{CM}{1+n^p}\sup_{x\in\mathbb{R}} \max(|\varphi(x)|, |\varphi^{(p)}(x)|).$$

Ce résultat est parfois connu sous le nom de "lemme de Riemann-Lebesgue". Grossièrement, il exprime que si la fonction à support compact φ est "assez régulière", ses coefficients de Fourier décroissent "assez vite" lorsque $n \to \infty$.

(ii): On a supposé que la suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C_a > 0$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad |a_n| \leq C_a.$$

Ainsi, en utilisant le résultat de la question précédente, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \left|a_n\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{inx}\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{CC_aM}{1+n^2}\sup_{x\in\mathbb{R}} \max(|\varphi(x)|, |\varphi''(x)|). \tag{4}$$

Puisque le membre de droite de cette inégalité est le terme général d'une série convergente, il s'ensuit que la série

$$\sum_n a_n \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{inx}\,\mathrm{d}x$$

est absolument convergente, donc convergente.

Définissant la suite de distributions T_N par la relation

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle T_N, \varphi \rangle = \sum_{n=-N}^{N} a_n \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{inx} \, \mathrm{d}x,$$

on voit que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\langle T_N, \varphi \rangle$ converge vers la quantité

$$\langle T, \varphi \rangle := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{inx} \, \mathrm{d}x.$$

En vertu du Théorème et Définition 4, l'application $\varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle$ définit une distribution sur $\mathbb{R}$.

Noter que l'on pourrait démontrer "à la main" la continuité de l'application limite T, en utilisant les estimations (4). Ce n'est en réalité pas nécessaire, puisque le Théorème - Définition 4 garantit que T est automatiquement une distribution.

(iii): Par définition, on a, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \langle T, \varphi \rangle &= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} a_n \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{inx} \, \mathrm{d}x \\ &= \lim_{N \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx} \right) \varphi(x) \, \mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{5}$$

où l'existence de la limite a été démontrée au cours de la Question (ii). On cherche une fonction $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ telle que

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) \, \mathrm{d}x.$$

Pour cela, une idée naturelle est d'essayer de montrer que la série de fonctions $\sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}$ converge, et que l'on peut intervertir la limite et l'intégrale dans (5).

Remarquons à cet effet que puisque la suite $\left\{ n^2 a_n \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est bornée, il existe une constante $C_a > 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad |a_n| \leq \frac{C_a}{n^2 + 1}.$$

Ainsi, la série de fonctions

$$\sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}$$

converge uniformémement sur $\mathbb{R}$, puisque la série des restes vérifie :

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_{|n| > N} a_n e^{inx} \right| &\leq \sum_{|n| > N} |a_n| \\ &\leq C_a \sum_{|n| > N} \frac{1}{n^2 + 1}, \end{aligned}$$

où le dernier terme au membre de droite tend vers 0.

Ainsi, la suite de fonctions $\sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction (continue) f lorsque $N \to \infty$. En utilisant cette convergence uniforme, on obtient :

$$\lim_{N \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx} \right) \varphi(x) \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx} \right) \varphi(x) \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) \, \mathrm{d}x,$$

et donc

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) \, \mathrm{d}x, \text{ où } f \text{ est la fonction continue } f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}.$$

3. Exercice 3 : Une propriété de la distribution de Dirac

Comme nous l'avons évoqué, l'un des intérêts majeurs de la théorie des distributions est qu'elle permet très simplement de définir des opérations sur les distributions.

Très informellement, on peut schématiser comme suit la stratégie générale pour étendre une opération $\mathrm{Op} : f \mapsto \mathrm{Op}(f)$ que l'on sait appliquer à de "bonnes fonctions" au cas des distributions $T \mapsto \mathrm{Op}(T)$: la distribution $T_{\mathrm{Op}(f)}$ associée à la fonction sur laquelle on a pratiqué l'opération Op s'écrit :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle T_{\mathrm{Op}(f)}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{Op}(f)(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

et on cherche (par exemple, par intégration par parties, changement de variables, etc.) à écrire cette expression sous la forme

$$\langle T_{\mathrm{Op}(f)}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{Op}^*(\varphi)(x)\,\mathrm{d}x = \langle T_f, \mathrm{Op}^*(\varphi) \rangle,$$

où $\mathrm{Op}^* : \varphi \mapsto \mathrm{Op}^*(\varphi)$ est une autre opération. En d'autres termes, on "transfère" l'effet de l'opération Op depuis la fonction f vers la fonction test φ. Alors, pour chaque $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on définira la distribution $\mathrm{Op}(T)$ par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle \mathrm{Op}(T), \varphi \rangle = \langle T, \mathrm{Op}^*(\varphi) \rangle,$$

ce qui garantit que Op généralise aux distributions l'effet de l'opération considérée sur les fonctions f.

Parmi les opérations les plus couramment employées sur les distributions, mentionnons les suivantes :

- *(Dérivée d'une distribution)* Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction "assez régulière" – disons de classe $\mathcal{C}^1$ – la distribution $T_{f'}$ (ou simplement f') associée à la dérivée f' de f s'exprime :

$$\langle f', \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x,$$

  où la seconde égalité résulte d'une intégration par parties, dont les termes de bord s'annulent puisque $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Une définition naturelle pour la dérivée d'une distribution quelconque $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est donc

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle T', \varphi \rangle := -\langle T, \varphi' \rangle.$$

  Par ce que nous venons de dire, si $T = T_f$ est la distribution associée à une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on a bien $(T_f)' = T_{f'}$, i.e. la dérivée au sens des distributions de la distribution T_f associée à f est la distribution $T_{f'}$ associée à f'.
- *(Produit d'une distribution et d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$)* Si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, et si g est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (pas forcément à support compact), la distribution associée au produit $fg \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ vérifie :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle fg, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \langle f, g\varphi \rangle,$$

  écriture qui est licite puisque $g\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Ainsi, on définira le produit gT d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ par la formule :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle gt, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle.$$

  Par ce qui précède, on voit que si $T = T_f$ est la distribution associée à la fonction $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, alors $gT_f = T_{gf}$.
- *(Translation d'une distribution)* Si $a \in \mathbb{R}$, on définit la translatée $\tau_a f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ d'une fonction $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ par

$$\tau_a f(x) = f(x-a),$$

  i.e. le graphe de $\tau_a f$ est identique à celui de f, à un décalage de a près, voir la Figure 3. Pour généraliser cette opération au cadre des distributions, on s'appuie sur le fait que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle \tau_a f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t+a)\,\mathrm{d}t = \langle f, \tau_{-a}\varphi \rangle.$$

  Encore une fois, on vérifie que si $T = T_f$ est la distribution associée à une fonction $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, on a bien $\tau_a(T_f) = T_{\tau_a f}$.

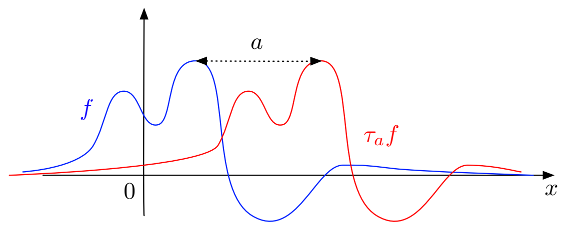

FIGURE 3. *Translatée $\tau_a f$ d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

Remarque 5. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'application $\tau_a : \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est inversible, d'inverse τ_{-a} (exercice facile).*

Enoncé : Soit $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, égale à 1 sur un voisinage de 0.

(i) Montrer que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la fonction $\psi(x)$, définie par
$$\psi(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\alpha(x)}{x}$$
appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

(ii) En déduire que si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est telle que $xT = 0$, alors $T = C\delta$, où C est une constante réelle et δ est la distribution de Dirac.

(iii) Soit $a \in \mathbb{R}$; montrer qu'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ satisfait $(x-a)T = 0$ si et seulement si elle est de la forme $T = C\delta_a$, où δ_a est la distribution de Dirac en a.

(i): La fonction ψ est clairement une fonction à support compact sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $(-\infty, 0)$ et sur $(0, \infty)$. Ainsi, pour démontrer le résultat attendu, il suffit de montrer que ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0. C'est ce que nous allons faire.

On commence par découper l'expression de ψ comme
$$\psi(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} + \varphi(0)\frac{1 - \alpha(x)}{x}.$$
Le second terme au membre de droite est nul sur un voisinage de 0 par définition de α. Ainsi, il suffit de montrer que la fonction
$$\widetilde{\psi}(x) := \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}$$
est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0.

Il y a plusieurs manières de procéder ; une façon astucieuse qui s'adapte à de nombreux contextes, consiste à écrire l'accroissement $(\varphi(x) - \varphi(0))$ au moyen d'une intégrale :
$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(0) &= \int_0^x \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= x\int_0^1 \varphi(xu)\mathrm{d}u, \end{aligned}$$
où l'on a effectué le changement de variables $t = xu$ pour passer de la première ligne à la seconde. Il s'ensuit que
$$\widetilde{\psi}(x) = \int_0^1 \varphi(xu)\mathrm{d}u.$$
Or, la fonction $x \mapsto \int_0^1 \varphi(xu)\mathrm{d}u$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 par application du théorème de dérivation sous le signe somme. L'application de ce dernier résulte facilement du fait que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et à support compact sur $\mathbb{R}$ ainsi que toutes ses dérivées.

Ainsi, la fonction $\widetilde{\psi}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, et donc ψ également. Finalement, on a montré que $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

(ii): Pour toute fonction test $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle T, x\psi \rangle = 0. \tag{6}$$

Ainsi, si toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ s'écrivait sous la forme $\varphi(x) = x\psi(x)$, où ψ est une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, on aurait $\langle T, \varphi \rangle = 0$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, et donc $T = 0$. Bien entendu, il n'est pas possible d'écrire n'importe quelle fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ sous la forme $\varphi(x) = x\psi(x)$, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (si tel était le cas, en particulier, toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ s'annulerait en 0). En revanche, nous allons décomposer toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ comme somme d'une fonction test de la forme $x\psi(x)$, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, qui sera aussi "proche" de φ que possible, et d'un "reste"'. Alors l'application de T à φ sera réduite à l'application de T à ce reste en vertu de (6), et on espère que cette relation apportera suffisamment d'information pour caractériser T.

Introduisons, comme suggéré par la question 1 une fonction $\alpha \in \mathcal{D}(R)$ valant 1 au voisinage de 0, et soit φ une fonction test quelconque de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. On vient de voir que la fonction ψ définie par

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\alpha(x)}{x}$$

est aussi une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. La fonction $x\psi(x)$ "ressemble" beaucoup à φ ; on a en effet :

$$\varphi(x) = x\psi(x) + \varphi(0)\alpha(x).$$

Appliquant T à cette relation, on trouve :

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, x\psi(x) \rangle + \langle T, \alpha \rangle \varphi(0),$$

et donc, par (6) :

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha \rangle \varphi(0).$$

Le réel $\langle T, \alpha \rangle$ est une constante C, qui dépend bien sûr de T, mais pas de la fonction test φ. Quant au terme $\varphi(0)$, on peut écrire celui-ci au moyen de la distribution de Dirac : $\varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$.

Finalement, on a prouvé que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle T, \varphi \rangle = C \langle \delta, \varphi \rangle,$$

c'est- à-dire que $T = C\delta$, comme attendu.

(iii): Il y a plusieurs manières de démontrer ce résultat. On peut bien sûr adapter la preuve de la question précédente (le faire est un bon exercice), ou bien être un peu plus astucieux, et se ramener à un cadre où l'on peut utiliser directement le résultat précédent.

On commence par remarquer que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vérifie $(x-a)T = 0$ si et seulement si

$$\tau_{-a}\Big((x-a)T\Big) = 0,$$

où l'on a utilisé le fait que $\tau_a : \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est inversible pour conserver l'équivalence (voir la Remarque 5 sur ce point).

Puisque

$$\tau_{-a}((x-a)T) = \Big(\tau_{-a}(x-a)\Big)\tau_{-a}T = x\tau_{-a}T,$$

(le vérifier), il vient que T vérifie $(x-a)T = 0$ si et seulement si

$$x\Big(\tau_{-a}T\Big) = 0.$$

Par la question précédente, ceci est vérifié si et seulement s'il existe une constante C telle que

$$\tau_{-a}T = C\delta$$

ou encore

$$T = C\tau_a\delta = C\delta_a.$$

4. Exercice 4 : Le "peigne de Dirac"

Enoncé : On considère les distributions fonctions e^{inx}.

(i) Montrer que pour tout $n \neq 0$,

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}((-\pi,\pi)), \quad |\langle e^{inx}, \varphi \rangle| \leq \frac{C(\varphi)}{n^2},$$

où $C(\varphi)$ est une constante qui ne dépend que de φ.

(ii) On pose :

$$u_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}.$$

Montrer que la suite T_N de distributions fonctions induite par les fonctions u_N converge dans $\mathcal{D}'((-\pi,\pi))$. Soit $T \in \mathcal{D}'((-\pi,\pi))$ la distribution limite.

(iii) Montrer que, pour tout $N \neq 0$, on a :

$$u_N(x) = \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}, \quad x \in (-\pi,\pi).$$

(iv) Montrer que si $\varphi \in \mathcal{D}((-\pi,\pi))$ est telle que $\varphi(0) = 0$, alors $\frac{\varphi(x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ est une fonction de $\mathcal{D}((-\pi,\pi))$. On rappelle pour cela que la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(v) Montrer que si $\varphi \in \mathcal{D}((-\pi,\pi))$ est telle que $\varphi(0) = 0$, alors $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

(vi) En déduire qu'il existe une constante C telle que :

$$T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx} = C\delta.$$

Remarque 6. *On verra plus tard dans le cours que la distribution T s'interprète comme la transformée de Fourier de la distribution "peigne de Dirac", et que la constante C vaut en réalité 2π.*

(i): Le résultat de cette question est un avatar du lemme de Riemann-Lebesgue, que l'on a déjà rencontré au cours de la Question (ii) de l'Exercice 2. La preuve est analogue, et procède d'une double intégration par parties dans l'expression de $\langle e^{inx}, \varphi \rangle$. En effet, pour une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}((-\pi,\pi))$ donnée ; on a :

$$\begin{aligned} \langle e^{inx}, \varphi \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) e^{inx} \, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi'(x) e^{inx} \, \mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{1}{in}\right)^2 \int_{-\pi}^{\pi} \varphi''(x) e^{inx} \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Ainsi, pour $n \neq 0$:

$$|\langle e^{inx}, \varphi \rangle| \leq \frac{C(\varphi)}{n^2}, \text{ où } C(\varphi) := 2\pi \sup_{x \in (-\pi,\pi)} |\varphi''(x)|.$$

De la même manière, pour $n = 0$, on a :

$$|\langle e^{inx}, \varphi \rangle| = |\langle 1, \varphi \rangle| \leq 2\pi \sup_{x \in (-\pi,\pi)} |\varphi(x)|.$$

Combinant les deux estimations obtenues pour $n = 0$ et $n \neq 0$, on obtient finalement

$$|\langle e^{inx}, \varphi \rangle| \leq \frac{C(\varphi)}{n^2+1}, \tag{7}$$

où $C(\varphi)$ est une constante réelle qui ne dépend que de φ (et qui s'exprime en termes des suprema de $|\varphi|$ et de $|\varphi''|$ sur $(-\pi,\pi)$).

(ii): Comme nous l'avons rappelé dans l'introduction de l'Exercice 3, pour montrer que la suite de distributions T_N converge dans $\mathcal{D}'((-\pi,\pi))$, il suffit de montrer que pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}((-\pi,\pi))$, la suite réelle $\langle T_N, \varphi\rangle$ converge. Alors, l'application limite $T : \mathcal{D}((-\pi,\pi)) \to \mathbb{R}$, définie par la formule

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}((-\pi,\pi)), \quad \langle T, \varphi\rangle = \lim_{N\to\infty} \langle T_N, \varphi\rangle$$

sera automatiquement une distribution de $\mathcal{D}'((-\pi,\pi))$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, et pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}((-\pi,\pi))$, la définition de T_N s'écrit :

$$\langle T_N, \varphi\rangle = \sum_{n=-N}^{N} \langle e^{inx}, \varphi\rangle.$$

Or, nous avons montré au cours de la Question (i) (voir (7)) que le terme général de la série ci-dessus vérifie :

$$|\langle e^{inx}, \varphi\rangle| \leq \frac{C(\varphi)}{n^2+1}$$

pour une constante $C(\varphi)$ qui ne dépend que de φ. Puisque la suite $\left\{ \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{n^2+1} \right\}_{N\in\mathbb{N}}$ est convergente, on en déduit que la série définissant $\langle T_N, \varphi\rangle$ est absolument convergente, et donc convergente.

Ainsi, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}((-\pi,\pi))$, la limite

$$\langle T, \varphi\rangle := \lim_{N\to\infty} \langle T_N, \varphi\rangle$$

existe. L'application T ainsi définie est donc une distribution sur $(-\pi,\pi)$.

(iii): Il s'agit de calculer la somme $u_N(x)$ pour $x \in (-\pi,\pi)$. Supposons d'abord que $x \neq 0$ (et donc que $e^{ix} \neq 1$). On fait apparaître une somme de termes en progression géométrique :

$$\begin{aligned} u_N(x) &= \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} \\ &= e^{-iNx} \sum_{n=0}^{2N} \left(e^{ix}\right)^n \\ &= e^{-iNx} \frac{e^{i(2N+1)x}-1}{e^{ix}-1}. \end{aligned}$$

Factorisant le numérateur et le dénominateur de l'expression ci-dessus par l'exponentielle de la demi-somme des exposants mis en jeu, on obtient :

$$\begin{aligned} u_N(x) &= e^{-iNx} \frac{e^{i\frac{2N+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}} \frac{e^{i\frac{2N+1}{2}x} - e^{-i\frac{2N+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} \\ &= e^{-iNx} e^{iNx} \frac{2i \sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}, \end{aligned}$$

ce qui est le résultat attendu.

Lorsque $x = 0$, on a immédiatement $u_N(x) = 2N+1$; cette valeur coincide avec la limite de la fonction $x \mapsto \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ en $x = 0$, comme on peut s'en assurer par un développement limité élémentaire de cette dernière fonction (laissé au lecteur !).

Au final, on a bien prouvé que

$$\forall x \in (-\pi,\pi), \quad u_N(x) = \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

(iv): Soit $\varphi \in \mathcal{D}((-\pi,\pi))$ une fonction test telle que $\varphi(0)=0$; alors la fonction

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

est évidemment à support compact dans $(-\pi,\pi)$, et elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $(-\pi,0)$ et sur $(0,\pi)$, car la fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $(-\pi,\pi)$ et s'annule seulement en 0. Ainsi, il suffit de montrer que ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 ; c'est ce que nous allons faire.

Pour cela, écrivons :

$$\psi(x) = \frac{2\varphi(x)}{x} \times \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^{-1}$$

Puisque la fonction $x \mapsto \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $(-\pi,\pi)$ et ne s'annule pas sur cet intervalle, il suffit encore de démontrer que la fonction $x \mapsto \frac{\varphi(x)}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0.

Pour montrer cette dernière assertion, on réutilise le calcul "astucieux" utilisé pour traiter la Question (i) de l'Exercice 3 :

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi(x)}{x} &= \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} \\
&= \frac{1}{x}\int_0^x \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \varphi'(xu)\,\mathrm{d}u,
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $\varphi(0)=0$ à la première ligne, ainsi que le changement de variables $t = xu$ pour passer de la seconde ligne à la troisième. De là, puisque φ est à support compact dans $(-\pi,\pi)$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$, le théorème de dérivation sous le signe somme permet facilement de conclure que la fonction $\frac{\varphi(x)}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 (voir la Question (i) de l'Exercice 3 au besoin).

Ceci achève de prouver que la fonction $x \mapsto \frac{\varphi(x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ est une fonction de $\mathcal{D}((-\pi,\pi))$.

(v): Soit $\varphi \in \mathcal{D}((-\pi,\pi))$ une fonction test telle que $\varphi(0)=0$. À ce stade, on ne sait rien de la distribution T, si ce n'est qu'elle est la limite de la suite de distributions T_N. La seule chose que l'on puisse dire de la quantité $\langle T,\varphi\rangle$ est donc que :

$$\langle T,\varphi\rangle = \lim_{N\to\infty}\langle u_N,\varphi\rangle,$$

l'existence de cette limite ayant été établie au cours de la Question (ii).

Utilisant l'expression de la fonction u_N trouvée à la Question (iii), ceci se réécrit :

$$\begin{aligned}
\langle T,\varphi\rangle &= \lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)\left(\frac{\varphi(x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{N\to\infty}\left\langle \sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right),\psi(x)\right\rangle,
\end{aligned}$$

où nous avons introduit la fonction

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)},$$

dont nous avons prouvé au cours de la Question (iv) qu'elle est une fonction de $\mathcal{D}((-\pi,\pi))$ (puisque $\varphi(0)=0$).

Or, on a, pour toute fonction test $\zeta \in \mathcal{D}((-\pi,\pi))$,

$$\lim_{N\to\infty}\left\langle \sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right),\zeta\right\rangle = 0,$$

ce qui se démontre exactement comme le résultat de la Question (i), ou bien celui de la Question (ii) de l'Exercice 2 (il s'agit encore d'un avatar du Lemme de Riemann-Lebesgue !).

Ainsi, on a prouvé que pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}((-\pi,\pi))$ telle que $\varphi(0)=0$, on a $\langle T,\varphi\rangle = 0$.

(vi): On vient de voir que pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}((-\pi,\pi))$ telle que $\varphi(0) = 0$, on a $\langle T, \varphi\rangle = 0$. En particulier, la distribution xT vérifie, pour une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}((-\pi,\pi))$ quelconque :

$$\begin{array}{rcl} \langle xT, \varphi\rangle & = & \langle T, x\varphi(x)\rangle \\ & = & 0, \end{array}$$

où la première ligne correspond exactement à la définition de la multiplication de la distribution $T \in \mathcal{D}'((-\pi,\pi))$ par la fonction $x \mapsto x$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $(-\pi,\pi)$, et la seconde ligne d'écoule de la Question (v) puisque la fonction test $x\varphi(x)$ s'annule en $x = 0$.

Ainsi, la distribution xT est nulle. Par le résultat de la Question (ii) de l'Exercice 3, ceci prouve que la distribution T vérifie

$$T = C\delta_0$$

pour une certaine constante réelle C, ce qui correspond au résultat attendu.

5. Exercice 5 : Limites de distributions

Enoncé : Calculer les limites dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, lorsque $h \to 0$, des suites de distributions suivantes :

(i) $T_h = \frac{1}{2h}(\delta_h - \delta_{-h})$;

(ii) $T_h = \frac{1}{4h^2}(\delta_{2h} + \delta_{-2h} - 2\delta_0)$;

(iii) $T_h = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{h^2}}$.

(i): Comme nous l'avons rappelé dans l'en-tête de l'Exercice 2, calculer la limite de la suite de distributions $T_h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ revient à calculer la limite de la suite réelle $\langle T_h, \varphi\rangle$, pour une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ arbitraire.

Un calcul élémentaire révèle que, pour une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ donnée :

$$\begin{array}{rcl} \langle T_h, \varphi\rangle & = & \dfrac{1}{2h}(\langle \delta_h, \varphi\rangle - \langle \delta_{-h}, \varphi\rangle) \\ & = & \dfrac{1}{2h}\Big(\varphi(h) - \varphi(-h)\Big). \end{array}$$

Pour calculer la limite de la forme indéterminée au membre de droite de l'égalité ci-dessus, on utilise un développement limité en 0 de la fonction φ, qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$:

$$\varphi(h) = \varphi(0) + h\varphi'(0) + \mathrm{o}(h),$$

et

$$\varphi(-h) = \varphi(0) - h\varphi'(0) + \mathrm{o}(h), \text{ où } \lim_{h\to 0} \frac{|\mathrm{o}(h)|}{|h|} \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \langle T_h, \varphi\rangle & = & \dfrac{1}{2h}(2h\varphi'(0) + \mathrm{o}(h)) \\ & = & \varphi'(0) + \mathrm{o}(1), \end{array}$$

et donc

$$\lim_{h\to 0}\langle T_h, \varphi\rangle = \varphi'(0) = \langle -\delta_0', \varphi\rangle.$$

Comme ceci est valable pour n'importe quelle fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a prouvé que

$$\lim_{h\to 0} T_h = -\delta_0' \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

(ii): Le raisonnement est identique à celui de la Question (i) : pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle T_h, \varphi\rangle = \frac{1}{4h^2}\Big(\varphi(2h) + \varphi(-2h) - 2\varphi(0)\Big).$$

Pour calculer la limite du membre de droite de l'égalité précédente, on écrit un développement limité de $\varphi(2h)$ et $\varphi(-2h)$ à l'ordre 2 en 0 :

$$\varphi(2h) = \varphi(0) + 2h\varphi'(0) + 2h^2\varphi''(0) + \mathrm{o}(h^2), \text{ où } \lim_{h\to 0} \frac{|\mathrm{o}(h^2)|}{|h^2|} \xrightarrow{h\to 0} 0$$

et

$$\varphi(-2h) = \varphi(0) - 2h\varphi'(0) + 2h^2\varphi''(0) + \mathrm{o}(h^2).$$

Ainsi, il vient :

$$\langle T_h, \varphi \rangle = \frac{1}{4h^2}\Big(4h^2\varphi''(0) + \mathrm{o}(h^2)\Big) = \varphi''(0) + \mathrm{o}(1),$$

et donc

$$\lim_{h\to 0}\langle T_h, \varphi \rangle = \varphi''(0) = \langle \delta_0'', \varphi \rangle.$$

Ceci prouve que

$$\lim_{h\to 0} T_h = \delta_0'' \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

(iii): Pour traiter cette question, nous aurons besoin de connaître la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}. \tag{8}$$

Maintenant, pour une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ arbitraire, on a, par définition de la distribution T_h :

$$\langle T_h, \varphi \rangle = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-\frac{x^2}{h^2}}\,\mathrm{d}x$$

Le membre de droite de l'égalité ci-dessus est une forme indéterminée. Pour lever l'indétermination, on effectue le changement de variables $x = hu$ dans l'intégrale, ce qui produit :

$$\langle T_h, \varphi \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(hu) e^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

On utilise à présent le théorème de convergence dominée pour analyser la convergence de l'intégrale ci-dessus. On sait pour cela que :

- Pour chaque $u \in \mathbb{R}$, on a la limite
$$\lim_{h\to 0}\Big(\varphi(hu)e^{-u^2}\Big) = \varphi(0)e^{-u^2};$$
- Pour chaque $h \in \mathbb{R}$, on a la majoration
$$\varphi(hu)e^{-u^2} \leq \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} \varphi(x)\right) e^{-u^2},$$
où la fonction au membre de droite de l'inégalité ci-dessus est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, on obtient :

$$\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}} \varphi(hu)e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \varphi(0)\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}\varphi(0),$$

où l'on a utilisé la valeur de l'intégrale (8). Finalement, on a prouvé que :

$$\lim_{h\to 0} T_h = \delta_0.$$