CORRECTION DU TD 3 : BASES HILBERTIENNES

Contents

1. Exercice 1 : L'espace de Hilbert des fonctions impaires et de carré sommable

Cet exercice se place dans le cadre des espaces de fonctions de carré sommable. Plus précisément, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on note $L^2(I,\mathbb{C})$ l'espace des fonctions de carré sommable sur I, à valeurs complexes :

$$L^2(I,\mathbb{C}) := \left\{ f : I \to \mathbb{C},\ \int_I |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

Rappelons que $L^2(I,\mathbb{C})$ est un espace de Hilbert complexe lorsqu'on le munit du produit scalaire suivant :

$$\forall f, g \in L^2(I,\mathbb{C}), \quad \langle f, g\rangle := \int_I f(x)\overline{g(x)} \,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

De la même manière, on montre que l'espace vectoriel $L^2(I,\mathbb{R})$ des fonctions à valeurs réelles, de carré sommable sur I, est un espace de Hilbert réel, lorsqu'on le munit du produit scalaire :

$$\forall f, g \in L^2(I,\mathbb{R}), \quad \langle f, g\rangle := \int_I f(x)g(x) \,\mathrm{d}x.$$

Définition 1. *Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une base Hilbertienne de H est une famille $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments qui est :*

- *Orthonormale : pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, le produit scalaire $\langle e_n, e_m\rangle$ vaut 1 si $n = m$, 0 sinon.*
- *Totale : l'ensemble*

$$\operatorname{vect}\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{c_1e_1 + \dots c_Ne_N \in H,\ N \in \mathbb{N},\ c_1,\dots,c_N \in \mathbb{K}\}$$

des combinaisons linéaires finies d'éléments de $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans H, i.e.

$$\overline{\operatorname{vect}\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}} = H.$$

De manière équivalente : pour tout élément $f \in H$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et des coefficients $c_1,\dots,c_N$ tels que :

$$\left\|f - \sum_{n=1}^{N} c_ne_n\right\| < \varepsilon.$$

Remarque 1. *En pratique, une base hilbertienne peut être indicée par n'importe quel ensemble dénombrable (i.e. en bijection avec $\mathbb{N}$) et pas seulement $\mathbb{N}$. La définition précédente s'adapte facilement à ce contexte.*

En pratique, pour démontrer qu'une famille de H est totale, on utilise souvent le résultat suivant :

Proposition 1 (Critère de totalité)**.** *Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe), et $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de H. La famille $\mathcal{B}$ est totale si et seulement si le seul élément $f \in H$ dont le produit scalaire est nul avec chaque élément de $\mathcal{B}$ est l'élément nul :*

$$\forall f \in H, \quad (\forall n \in \mathbb{N},\ \langle f, e_n\rangle = 0) \Rightarrow f = 0.$$

Grossièrement, la notion de base Hilbertienne dans un espace de Hilbert H joue un rôle similaire à celui de base orthonormale dans un espace vectoriel de dimension finie, à ceci près que les sommes en jeu sont infinies : à ce titre, il est essentiel de bien comprendre dans quelle mesure les identités que l'on a écrites plus haut font sens. À cet effet, rappelons les faits suivants, si $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base Hilbertienne de H :

- Pour tout $f \in H$, il existe une unique suite de coefficients $c_n \in \mathbb{K}$ telle que :

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n.$$

  Par définition, cette égalité signifie que la somme au membre de droite converge dans H vers f, i.e.

$$\lim_{N\to\infty} \left|\left| f - \sum_{n=0}^{N} c_n e_n \right|\right| = 0.$$

- Les coefficients $c_n \in \mathbb{K}$ de f dans la base Hilbertienne $\mathcal{B}$ (i.e. les éléments de $\mathbb{K}$ figurant dans la relation ci-dessus) ont l'expression :

$$c_n = \langle f, e_n \rangle.$$

  La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ces coefficients est de carré sommable et sa somme vaut :

$$||f||^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2.$$

  L'identité ci-dessus, qui exprime de manière équivalente la convergence quadratique de la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n$, est appelée identité de Bessel - Parseval.

Finalement, le résultat suivant donne une base Hilbertienne de l'espace $L^2([0,T],\mathbb{C})$ des fonctions à valeurs complexes et de carré sommable sur l'intervalle $[0,T] \subset \mathbb{R}$.

Théorème 2. *Soit $T > 0$; la famille $\left\{\frac{1}{\sqrt{T}} e^{\frac{2i\pi n x}{T}}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base Hilbertienne de l'espace de Hilbert complexe $L^2([0,T],\mathbb{C})$.*

Remarque 2. *Au regard des commentaires que nous avons faits autour de la notion de base Hilbertienne, ce résultat signifie exactement que, pour toute fonction $f \in L^2([0,T],\mathbb{C})$, il existe une suite de coefficients $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ telle que :*

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{\frac{2i\pi n x}{T}} \xrightarrow{N\to\infty} f(x) \ \textit{dans}\ L^2([0,T],\mathbb{C}). \tag{2}$$

Les coefficients c_n apparaissant dans cette relation s'écrivent :

$$c_n = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{T}} e^{\frac{2i\pi n x}{T}} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T f(x) e^{\frac{-2i\pi n x}{T}}\,\mathrm{d}x,$$

et ils forment une suite de carré sommable, dont la somme vaut :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = \int_0^T |f(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

Les conclusions précédentes constituent la théorie L^2 des séries de Fourier. Il faut souligner que la convergence (2) vers f de sa série de Fourier a lieu dans $L^2([0,T],\mathbb{C})$, et pas nécessairement en chaque point $x \in [0,T]$. Des hypothèses plus fortes sur f sont nécessaires pour que ce dernier point soit vrai, comme nous le rappellerons à l'occasion de la dernière question de l'exercice 1.

Enoncé : On introduit l'espace H défini par :

$$H = \left\{ f \in L^2([-\pi,\pi],\mathbb{R}),\ \ f \text{ impaire} \right\}.$$

(i) Montrer (rapidement) que H, muni du produit scalaire

$$\forall f, g \in H, \quad \langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

est un espace de Hilbert.

(ii) Montrer que la famille $\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \right\}_{n\geq 1}$ est une base Hilbertienne de H.

(iii) Soit f la fonction définie sur $[-\pi,\pi]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(\pi + x) & \text{si } x < 0, \\ \frac{1}{2}(\pi - x) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Calculer les coefficients c_n de f sur la base $\mathcal{B}$, i.e. $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}$.

(iv) Que peut-on dire de la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}$ au sens de :

- La convergence ponctuelle ?
- La convergence normale ?
- La convergence dans l'espace H ?

(i): On montre sans difficulté que H est un sous-espace vectoriel (réel) de l'espace $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$, et on sait (voir les rappels ci-dessus) que ce dernier est un espace de Hilbert lorsqu'on le munit du produit scalaire (3).

D'autre part, un sous-espace vectoriel d'un espace complet est lui-même complet si et seulement s'il est fermé. Ainsi, pour démontrer que H est un espace de Hilbert, il suffit de montrer que H est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ (lorsque celui-ci est muni du produit scalaire (3) et de la norme associée) : c'est ce que nous allons faire.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de H qui converge dans $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ vers une certaine fonction $f \in L^2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$; on veut montrer que f est impaire. Pour cela, on traduit l'imparité des fonctions f_n en termes d'une quantité qui se prête bien au passage à la limite dans $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall g \in L^2([-\pi,\pi],\mathbb{R}), \quad \int_{-\pi}^{\pi} \Big(f_n(x) + f_n(-x) \Big) g(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Comme $f_n \to f$ dans $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$, on a aussi $f_n(-x) \to f(-x)$ dans $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ (le vérifier). En passant à la limite dans la relation ci-dessus, on a donc :

$$\forall g \in L^2([-\pi,\pi],\mathbb{R}), \quad \int_{-\pi}^{\pi} \Big(f(x) + f(-x) \Big) g(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

La fonction $(f(x) + f(-x)) \in L^2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ a un produit scalaire nul contre tout élément de $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$, et donc est nulle, i.e.

$$f(x) = -f(-x) \text{ p. p. tout } x \in (-\pi,\pi),$$

c'est-à-dire que f est impaire, comme attendu.

Ainsi, H est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$: c'est donc un espace de Hilbert.

Remarque 3. *Il est intéressant de noter que H est l'orthogonal du sous-espace $P \subset L^2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ des fonctions paires :*

$$P = \left\{ f \in L^2([-\pi,\pi],\mathbb{R}),\ \ f \text{ paire} \right\},$$

dont on montre, par des moyens analogues à ce que l'on a fait ci-dessus qu'il s'agit d'un sous-espace fermé de $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$. En effet,

- *D'une part, si $f \in H$ et $g \in P$ (f est impaire et g est paire), on a :*

$$\begin{aligned} \langle f, g\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(-u)g(-u)\,\mathrm{d}u \\ &= -\int_{-\pi}^{\pi} f(u)g(u)\,\mathrm{d}u, \end{aligned}$$

  où l'on a utilisé le changement de variables $x = -u$ pour passer de la première ligne à la seconde, et l'imparité de f et la parité de g pour passer de la seconde ligne à la troisième. On a donc $\langle f, g\rangle = 0$, ce qui implique que les deux espaces H et P sont orthogonaux (en particulier, ils sont en somme directe : $H \cap P = \{0\}$).
- *D'autre part, toute fonction $f \in L^2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ s'écrit comme la somme d'une fonction de H et d'une fonction de P, puisque :*

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{2}\Big(f(x)+f(-x)\Big)}_{\in P} + \underbrace{\frac{1}{2}\Big(f(x)-f(-x)\Big)}_{\in H}.$$

  Ainsi, on a :

$$L^2([-\pi,\pi],\mathbb{R}) = H \oplus P,$$

  où les deux termes de la somme directe sont orthogonaux.

(ii): Commençons par observer que la famille $\mathcal{B} = \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)\right\}_{n\geq 1}$ est orthonormale. Pour cela, pour $n, m \geq 1$, on calcule :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(mx)\right\rangle &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\cos((n-m)x)+\cos((n+m)x)\Big)\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la formule de trigonométrie :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\Big(\cos(a-b)-\cos(a+b)\Big).$$

Comme l'intégrale du cosinus est nulle sur une période, on voit que l'expression ci-dessus vaut simplement :

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(mx)\right\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrons maintenant que la famille $\mathcal{B}$ est totale dans H. On va utiliser pour cela le fait que la famille $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base Hilbertienne de l'espace de Hilbert complexe $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ (voir le Théorème 2 rappelé plus haut). Ainsi, il existe des nombres complexes $d_n \in \mathbb{C}$ tels que :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_n}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}, \tag{4}$$

où la somme ci-dessus converge dans $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$. Les coefficients d_n valent ici :

$$d_n = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\right\rangle_{L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x,$$

où il convient de noter que le signe $-$ dans l'exposant de l'exponentielle vient de la conjugaison complexe portant sur le second terme dans la définition (1) du produit scalaire sur $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$. Ainsi, on a, par imparité de f, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, \mathrm{d}x - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{5}$$

On remarque au passage que $d_0 = 0$ et $d_n = -d_{-n}$ pour tout $n \geq 1$.

D'autre part, les termes de la somme figurant au second membre de (4) peuvent être regroupés deux par deux, ce qui donne :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{d_n}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_{-n}}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} d_n \left(e^{inx} - e^{-inx} \right) \\ &= \frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin(nx) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\sqrt{\pi}} \sin(nx), \end{aligned}$$

où $c_n = i\sqrt{2} d_n$, et la convergence a lieu dans $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$, et donc en réalité dans $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ puisque la fonction f et chaque terme de la somme du membre de droite ci-dessus sont réels. Compte tenu de l'expression (5) de d_n, les coefficients c_n valent :

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, \mathrm{d}x.$$

Ceci achève de montrer que la famille $\mathcal{B}$ est totale dans H, et donc est une base Hilbertienne de H.

(iii): On a vu que les coefficients c_n de la fonction f sur la base Hilbertienne $\mathcal{B}$ sont donnés par :

$$c_n = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, \mathrm{d}x \;;$$

calculons donc cette quantité. Tout d'abord, puisque f est impaire, et pour tout n, $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)$ est impaire, le produit $\frac{1}{\sqrt{\pi}} f(x) \sin(nx)$ est pair, et donc :

$$c_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, \mathrm{d}x.$$

Une intégration par parties donne ensuite :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin(nx)\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[-\frac{(\pi - x)}{n} \cos(nx) \right]_0^{\pi} + \frac{1}{\sqrt{\pi} n} \int_0^{\pi} -\cos(nx)\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{n} - \frac{1}{\sqrt{\pi} n} \int_0^{\pi} \cos(nx)\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{n} - \frac{1}{\sqrt{\pi} n} \left[\frac{1}{n} \sin(nx) \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{n}. \end{aligned} \tag{6}$$

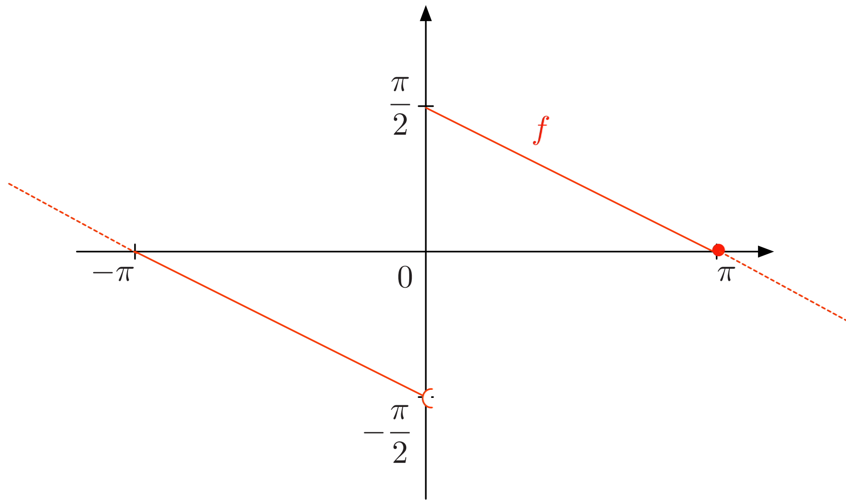

FIGURE 1. *Graphe de la fonction f de l'exercice 1.*

(iv): Commençons par les résultats purement "Hilbertiens". En vertu des propriétés des bases Hilbertiennes rappelées en amont de cet exercice, on voit immédiatement que :

- La somme $\sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)$ converge vers f dans l'espace H :

$$\left|\left| f - \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \right|\right| \xrightarrow{N\to\infty} 0. \tag{7}$$

- La somme $\sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)$ converge quadratiquement, c'est-à-dire que la série réelle à termes positifs

$$\sum_{n=1}^{N} \left|\left| \frac{c_n}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \right|\right|^2 = \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2$$

  est convergente. Sa limite est :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = ||f||^2.$$

  Utilisant l'expression (6) de c_n calculée à la question précédente, et après un petit calcul facile pour la norme $||f||^2 = \frac{\pi^3}{6}$, cette relation produit :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

  une formule bien connue en combinatoire.

Considérons maintenant la convergence ponctuelle de la somme $\sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)$. Comme on l'a souligné à la Remarque 2, rien dans la théorie Hilbertienne utilisée jusqu'à présent ne permet de conclure que $\sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)$ converge vers $f(x)$ pour un point $x \in [-\pi, \pi]$ particulier. Tout au plus peut-on déduire de la convergence (7) en norme L^2 que la suite $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{c_n}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)$ convergence à une sous-suite près, presque partout vers f.

En fait, on a (et on admet) le résultat suivant :

Théorème 3. *Soit $T > 0$ et soit $f : [0, T] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. En particulier, $f \in L^2([0, T], \mathbb{C})$ et on note c_n ses coefficients de Fourier dans la base Hilbertienne $\left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} e^{\frac{2i\pi nx}{T}} \right\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Alors,* *pour tout $x \in [0,T]$, la convergence suivante a lieu :*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{c_n}{\sqrt{T}} e^{\frac{2i\pi nx}{T}} = \frac{1}{2}\Big(f(x^+) + f(x^-)\Big),$$

où l'on a noté

$$f(x^-) := \lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} f(x+t) \text{ et } f(x^+) := \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(x+t)$$

les limites de f en x à gauche et à droite respectivement (en supposant f périodisée, de sorte que $f(0^-) = f(T-)$ et $f(T^+) = f(0^+)$ dans cette formule).

Dans le cas présent, puisque la somme $\sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)$ est exactement la somme partielle de Fourier de f (revoir le calcul de la question 2), on a, compte tenu de la définition de f (qui est continue en tout point sauf en $x = 0$):

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{c_n}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \xrightarrow{N\to\infty} \left\{ \begin{array}{ll} f(x) & \text{si } x \neq 0, \\ \frac{1}{2}(f(0^-) + f(0^+)) = 0 & \text{si } x = 0. \end{array} \right.$$

2. Exercice 2 : La base de Haar

Enoncé : On se place dans l'espace $L^2([0,1])$, muni du produit scalaire usuel, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et de la norme associée $||\cdot||$. Soit φ la fonction caractéristique de l'intervalle $[0,1]$, et ψ la fonction définie par :

$$\psi(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x-1).$$

(i) Tracer la courbe de ψ et vérifier que les fonctions φ et ψ sont orthogonales.

On pose, pour tout entier $j \geq 0$ et pour tout $0 \leq k \leq 2^j - 1$

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k).$$

(ii) Montrer que la famille $\{\varphi\} \cup \{\psi_{j,k}\}_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ 0\leq k\leq 2^j-1}}$ est une base Hilbertienne de $L^2([0,1])$.

(iii) Montrer que le support de la fonction $\psi_{j,k}$ est l'intervalle $I_{j,k} := \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right]$. En déduire que si f est constante sur un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ tel que $I_{j,k} \subset [a,b]$, alors $\langle f, \psi_{j,k} \rangle = 0$. Interpréter.

(iv) Écrire un algorithme de décomposition d'une fonction $f \in L^2([0,1])$ sur la famille finie $\{\varphi\} \cup \{\psi_{j,k}\}_{\substack{j\leq J\\ 0\leq k\leq 2^j-1}}$, pour un entier J donné.

(i): La fonction φ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

Ainsi, la fonction ψ est donnée par ;

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ -1 & \text{si } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right], \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

Les courbes de φ et ψ sont représentées sur la Figure 2. Ces deux fonctions sont orthogonales puisque

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 \varphi\psi \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} 1 \,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 (-1) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

(ii): Avant de montrer que la famille $\{\varphi\} \cup \{\psi_{j,k}\}_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ 0\leq k\leq 2^j-1}}$ est une base Hilbertienne de $L^2([0,1])$ à proprement parler, commençons par faire quelques remarques concernant les fonctions $\psi_{j,k}$.

• *Commençons par donner une expression alternative des $\psi_{j,k}$.* Il résulte immédiatement de la définition de ψ que

$$\forall j \in \mathbb{N},\ k = 0, \ldots, 2^j - 1, \quad \psi_{j,k}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 2^{\frac{j}{2}} & \text{si } 2^j x - k \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ -2^{\frac{j}{2}} & \text{si } 2^j x - k \in \left(\frac{1}{2}, 1\right], \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

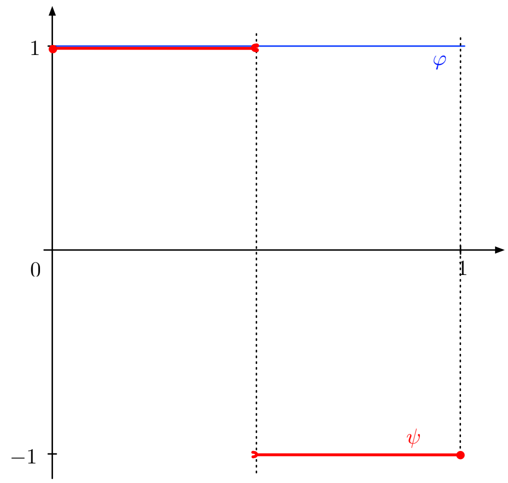

FIGURE 2. *Graphe des fonctions φ et ψ de l'exercice 2.*

En d'autres termes, la fonction $\psi_{j,k}$ est à support dans l'intervalle $I_{j,k} := \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right]$, et vaut

$$\psi_{j,k}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}} & \text{si } x \in \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}}\right), \\ -2^{\frac{j}{2}} & \text{si } x \in \left(\frac{k}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}}, \frac{k+1}{2^j}\right], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{8}$$

On remarque également que chaque fonction $\psi_{j,k}$ a une moyenne nulle sur $[0,1]$:

$$\int_0^1 \psi_{j,k}(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{9}$$

À titre d'illustration, les fonctions $\psi_{j,k}$ sont représentées sur la Figure 3 pour les valeurs $j = 1, 2$.

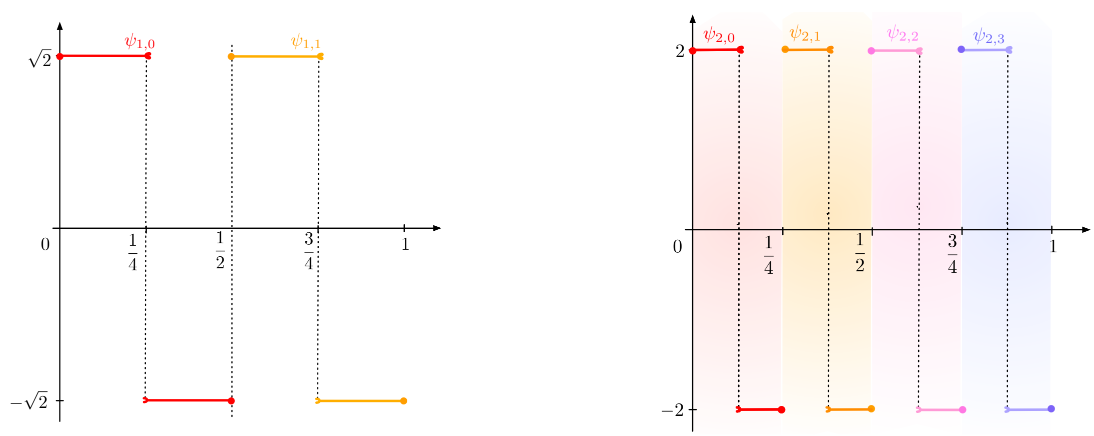

FIGURE 3. *Graphe des fonctions $\psi_{j,k}$ définies dans l'exercice 2. Attention : l'échelle des ordonnées n'est pas la même sur les deux figures.*

- *Montrons à présent que la famille $\{\varphi\} \cup \{\psi_{j,k}\}_{\substack{j\in\mathbb{N} \\ 0\le k\le 2^j-1}}$ est une famille orthonormale de $L^2([0,1])$.*

Tout d'abord, un calcul en tout point semblable à celui de la question *(i)* révèle que $||\varphi|| = 1$ et que les fonctions φ et $\psi_{j,k}$ sont orthogonales pour $j \in \mathbb{N}$ et $k = 0, \ldots, 2^j - 1$ (voir (9)).

Soit deux indices (j,k) et (j',k'). Si $j \neq j'$, on peut supposer sans perte de généralité que $j < j'$. Au vu de l'expression explicite donnée par la formule (8), la fonction $\psi_{j,k}$ est constante sur chaque intervalle de la forme $I_{j',l} = \left(\frac{l}{2^{j'}}, \frac{l+1}{2^{j'}}\right)$, pour $l = 0, \dots, 2^{j'} - 1$ (elle y prend la valeur $2^{\frac{j}{2}}$ ou $-2^{\frac{j}{2}}$). Ainsi, on obtient immédiatement

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle = \int_0^1 \underbrace{\psi_{j,k}(x)}_{\text{constante sur } I_{j',k'}} \underbrace{\psi_{j',k'}(x)}_{\substack{\text{à support dans } I_{j',k'} \\ \text{et à moyenne nulle}}} \, \mathrm{d}x = 0 \quad \text{dès que } j \neq j'.$$

Si maintenant on a $j = j'$, mais $k \neq k'$, on voit, toujours par la formule (8) que les supports $I_{j,k}$ et $I_{j',k'}$ de $\psi_{j,k}$ et $\psi_{j,k'}$ sont disjoints, et donc :

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle = 0 \text{ si } (j,k) \neq (j',k').$$

Enfin, dans le cas où $(j,k) = (j',k')$, on obtient

$$||\psi_{j,k}||^2 = \langle \psi_{j,k}, \psi_{j,k} \rangle = \int_0^1 2^j \psi(2^j x - k)^2 \, \mathrm{d}x = 2^j \int_{\frac{k}{2^j}}^{\frac{k+1}{2^j}} 1 \, \mathrm{d}x = \frac{2^j}{2^j} = 1.$$

Ainsi, la famille $\{\varphi\} \cup \{\psi_{j,k}\}_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ 0 \leq k \leq 2^j - 1}}$ est une famille orthonormale de $L^2([0,1])$.

• *Un autre fait important est le suivant : pour $J \geq 0$ donné, la famille $\{\varphi\} \cup \{\psi_{j,k}\}_{\substack{j \leq J-1 \\ 0 \leq k \leq 2^j - 1}}$ est une base (orthonormale) de l'espace vectoriel de dimension finie $V_J \subset L^2([0,1])$ défini par*

$$V_J = \left\{ f \in L^2([0,1]),\ f \text{ est constante sur tous les intervalles } I_{J,l} = \left(\frac{l}{2^J}, \frac{l+1}{2^J}\right) l = 0, \dots, 2^J - 1 \right\}.$$

Grossièrement, la famille $\{\varphi\} \cup \{\psi_{0,0}\}$ permet d'engendrer toutes les fonctions $f \in V_1$ constantes sur $(0, \frac{1}{2})$ et $(\frac{1}{2}, 1)$ puisque

$$\frac{1}{2}(\varphi(x) + \psi_{0,0}(x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ x \in (0, \frac{1}{2}), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(\varphi(x) - \psi_{0,0}(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x \in (0, \frac{1}{2}), \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De même, la famille $\{\varphi\} \cup \{\psi_{0,0}, \psi_{1,0}, \psi_{1,1}\}$ permet d'engendrer toutes les fonctions $f \in V_2$, constantes sur chacun des quatre intervalles $(0, \frac{1}{4})$, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, $(\frac{3}{4}, 1)$; par exemple :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\varphi(x) + \psi_{0,0}(x)) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{1,0}(x)\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ x \in (0, \frac{1}{4}), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Rigoureusement, la propriété énoncée plus haut se vérifie par une récurrence immédiate.

Notons qu'une autre base orthonormale de l'espace V_J, peut-être plus naturelle que celle $\{\varphi\} \cup \{\psi_{j,k}\}_{\substack{j \leq J-1 \\ 0 \leq k \leq 2^j - 1}}$ que nous venons d'exhiber, est donnée par la famille $\{\zeta_{J,l}\}_{l=0,\dots,2^J-1}$ définie par

$$\zeta_{J,l}(x) = 2^{\frac{J}{2}} \mathbb{1}_{\left(\frac{l}{2^J}, \frac{l+1}{2^J}\right)}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{J}{2}} & \text{si } \ x \in \left(\frac{l}{2^J}, \frac{l+1}{2^J}\right), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ces fonctions $\zeta_{j,k}$ sont tracées sur la Figure 4 pour les valeurs $j = 1, 2$.

Il est utile pour la suite d'observer les relations suivantes, qui découlent directement des définitions des fonctions $\psi_{j,k}$ et $\zeta_{j,k}$:

$$\varphi = \zeta_{0,0} \text{ et } \psi_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta_{j+1,2k} - \zeta_{j+1,2k+1}), \quad j \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq 2^j - 1, \tag{10}$$

et

$$\zeta_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta_{j+1,2k} + \zeta_{j+1,2k+1}), \quad j \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq 2^j - 1. \tag{11}$$

Nous pouvons à présent montrer que la famille $\{\varphi\} \cup \{\psi_{j,k}\}_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ 0 \leq k \leq 2^j - 1}}$ est une base Hilbertienne de $L^2([0,1])$.

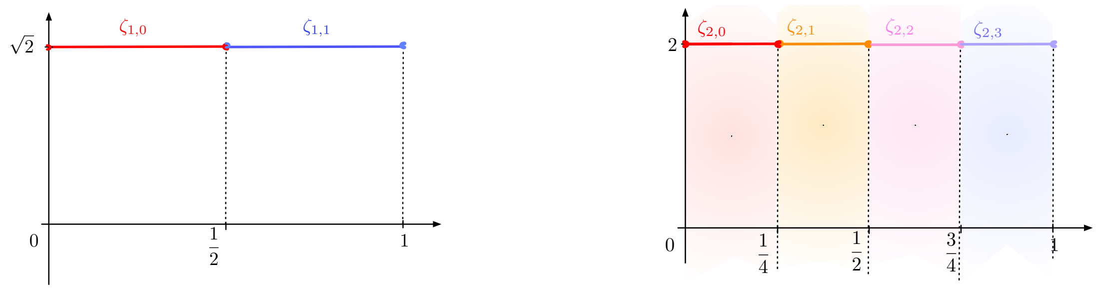

FIGURE 4. *Graphe des fonctions $\zeta_{j,k}$ définies dans l'exercice 2. Attention : l'échelle des ordonnées n'est pas la même sur les deux figures.*

Comme nous avons déjà vu que cette famille est orthonormale, il nous reste à montrer que les combinaisons linéaires finies d'éléments de cette famille sont denses dans $L^2([0,1])$, i.e. que pour toute fonction $f \in L^2([0,1])$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $J \in \mathbb{N}$ et des coefficients $d_{j,k}$, $j = 0,\ldots,J$, $k = 0,\ldots,2^J - 1$, tels que

$$\left|\left| f - \sum_{j=0}^{J} \sum_{k=0}^{2^J-1} d_{j,k}\psi_{j,k} \right|\right| \le \varepsilon.$$

Pour ce faire, commençons par observer que, par densité des fonctions continues dans $L^2([0,1])$, il suffit de prouver que ceci est vrai pour toute fonction f continue. D'autre part, comme, pour chaque entier J, une autre base de l'espace vectoriel de dimension finie V_J engendré par la famille $\{\varphi\} \cup \{\psi_{j,k}\}_{\substack{j \le J-1 \\ 0 \le k \le 2^{J-1}-1}}$ est la famille $\{\zeta_{J,l}\}_{0 \le l \le 2^J-1}$, il suffit de montrer qu'il existe $J \in \mathbb{N}$ et des coefficients $c_{J,l}$ ($l = 0,\ldots,2^J-1$) tels que

$$\left|\left| f - \sum_{l=0}^{2^J-1} c_{J,l}\zeta_{j,l} \right|\right| \le \varepsilon.$$

Ce dernier point résulte d'un argument d'approximation assez classique. En effet, puisque f est continue sur $[0,1]$, elle y est uniformément continue. Ainsi, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $J > 0$ assez grand tel que

$$\forall x, y \in [0,1] \text{ tels que } |x-y| \le \frac{1}{2^J},\ \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Introduisons alors la fonction $\tilde{f} \in V_J$ définie par

$$\tilde{f}(x) = \sum_{l=0}^{2^J-1} c_{J,l}\zeta_{J,l}(x), \text{ où } c_{J,l} := \frac{f(\frac{l}{2^J})}{2^{\frac{J}{2}}},$$

et considérons la différence

$$f(x) - \tilde{f}(x) = f(x) - \sum_{l=0}^{2^J-1} \frac{f(\frac{l}{2^J})}{2^{\frac{J}{2}}}\zeta_{J,l}(x) = \sum_{l=0}^{2^J-1} \left(f(x) - f\left(\frac{l}{2^J}\right)\right) \mathbb{1}_{(\frac{l}{2^J},\frac{l+1}{2^J})}(x).$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} ||f - \tilde{f}||^2 &= \sum_{l=0}^{2^J-1} \int_{\frac{l}{2^J}}^{\frac{l+1}{2^J}} \left(f(x) - f\left(\frac{l}{2^J}\right)\right)^2 \mathrm{d}x \\ &\le \sum_{l=0}^{2^J-1} \frac{1}{2^J}\varepsilon^2 \\ &= \varepsilon^2, \end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat.

(iii): Nous avons déjà montré au cours de la question précédente que chaque fonction $\psi_{j,k}$, $j \in \mathbb{N}$, $k = 0,\ldots,2^J - 1$, est à support dans l'intervalle $I_{j,k}$.

En adaptant facilement la preuve de l'orthogonalité des fonctions $\psi_{j,k}$ donnée plus haut, on montre que si une fonction $f \in L^2([0,1])$ est constante sur un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ tel que $I_{j,k} \subset [a,b]$, alors $\langle f, \psi_{j,k} \rangle = 0$. Grossièrement, ceci témoigne du fait que les coefficients $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$ de la décomposition de f sur la base Hilbertienne $\{\varphi\} \cup \{\psi_{j,k}\}_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ 0 \leq k \leq 2^j - 1}}$ capturent les variations de f sur les intervalles $I_{j,k}$ qui sont de plus en plus fins à mesure que j croît (alors que le premier coefficient $\langle f, \varphi \rangle$ mesure la valeur moyenne de f).

(iv): Pour une fonction $f \in L^2([0,1])$ et un niveau $J \in \mathbb{N}$ donnés, on souhaite calculer les coefficients $d_{j,k}$, $j = 0, \ldots, J$, $k = 0, \ldots, 2^j - 1$ de la projection orthogonale $\tilde{f}$ de f sur l'espace vectoriel de dimension finie V_{J+1}, i.e.

$$\tilde{f} = d_{0,0}\varphi + \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=0}^{2^j - 1} d_{j,k}\psi_{j,k}.$$

Les coefficients de cette décomposition sur une base Hilbertienne s'expriment comme :

$$d_{0,0} = \langle f, \varphi \rangle = \int_0^1 f\varphi \, \mathrm{d}x, \text{ et } d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \int_0^1 f\psi_{j,k} \, \mathrm{d}x.$$

D'autre part, on sait que la fonction $\tilde{f}$ admet une décomposition sur la base orthonormale $\{\zeta_l\}_{l=0,\ldots,2^{J+1}-1}$ de V_{J+1}, que l'on écrit :

$$\tilde{f} = \sum_{l=0}^{2^{J+1}-1} c_{J+1,l}\zeta_{J+1,l}, \text{ où } c_{J+1,l} = \int_0^1 f\zeta_{J+1,l} \, \mathrm{d}x = \int_{\frac{l}{2^{J+1}}}^{\frac{l+1}{2^{J+1}}} f \, \mathrm{d}x. \tag{12}$$

L'algorithme de calcul hiérarchique des coefficients $d_{j,k}$ commence par le calcul des coefficients $c_{J+1,l}$, $l = 0, \ldots, 2^{J+1} - 1$. En pratique, pour réaliser cette étape, f est échantillonnée aux points $\frac{l}{2^{J+1}}$, $l = 0, \ldots, 2^{J+1}$, et on fait l'approximation $c_{J+1,l} \approx \frac{1}{2^{J+1}} f(\frac{l}{2^{J+1}})$.

Puis, en exploitant la relation (10) entre les fonctions $\psi_{j,k}$ et les fonctions $\zeta_{j+1,l}$, on obtient :

$$d_{J,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{J+1,2k} - c_{J+1,2k+1}), \text{ pour tout } k = 0, \ldots, 2^J - 1;$$

ceci permet de calculer les coefficients $d_{j,k}$ pour $j = J$.

On peut alors itérer ce procédé pour calculer les coefficients $d_{J-1,k}$, $k = 0, \ldots, 2^{J-1} - 1$. En effet, en utilisant la relation (11), on peut calculer les réels

$$c_{J,k} = \int_0^1 f\zeta_{J,k} \, \mathrm{d}x,$$

(qui correspondent à la décomposition de la projection orthogonale de f sur l'espace V_J, voir (12)), ce qui produit :

$$c_{J,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{J+1,2k} + c_{J+1,2k+1}), \text{ pour tout } k = 0, \ldots, 2^J - 1.$$

On obtient alors, de même que précédemment :

$$d_{J-1,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{J,2k} - c_{J,2k+1}), \text{ pour tout } k = 0, \ldots, 2^{J-1} - 1,$$

et ainsi de suite, jusqu'au rang $J = 0$.

Résumons l'algorithme tiré de ces considérations :

- **Entrée :** on se donne $f \in L^2([0,1])$ et un niveau J souhaité.
- **Initialisation :** Calculer les coefficients
$$c_{J+1,k} \approx \frac{1}{2^{J+1}} f\left(\frac{k}{2^{J+1}}\right), \quad k = 0, \ldots, 2^{J+1} - 1.$$
- **Pour j allant de J à 0,**
  (1) Calculer
$$d_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{j+1,2k} - c_{j+1,2k+1}) \text{ pour } k = 0, \ldots, 2^j - 1.$$

(2) Calculer

$$c_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(c_{j+1,2k} + c_{j+1,2k+1} \right) \text{ pour } k = 0, \dots, 2^j - 1.$$

- **Sortie :** coefficients $d_{j,k}$, $0 \leq j \leq J$, $k = 0, \dots, 2^j - 1$.

Remarque 4. *En pratique, le stockage d'une fonction $f \in L^2([0,1])$ sous la forme d'un nombre fini de coefficients dans la base de Haar $\{\varphi\} \cup \{\psi_{j,k}\}_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ 0 \leq k \leq 2^j - 1}}$ définie dans cet exercice est très efficace : il s'avère que peu de coefficients sont nécessaires pour reconstruire f avec une bonne précision. De nombreux résultats mathématiques formalisent cette assertion, qui est à la base de la théorie des ondelettes.*