CORRECTION DU TD 2 : GÉNÉRALITÉS AUTOUR DES ESPACES DE HILBERT (II)

Contents

1. Exercice 1 : Opérateurs auto-adjoints

Soit H un espace de Hilbert (que l'on choisit réel, pour simplifier) muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$, et de la norme induite $||\cdot||$. Commençons par rappeler la définition suivante :

Définition 1. *Une forme linéaire sur H est une application linéaire $\ell : H \to \mathbb{R}$; celle-ci est dite continue lorsqu'il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$\forall x \in H, \ |\ell(x)| \leq C||x||. \tag{1}$$

Sa norme d'opérateur $||\ell||$ est alors définie par :

$$||\ell|| = \sup_{\substack{x\in H \\ x\neq 0}} \frac{|\ell(x)|}{||x||}.$$

En d'autres termes, la norme d'opérateur $||\ell||$ est la meilleure constante C (i.e. la plus petite, celle donnant lieu à l'estimation la plus fine) que l'on peut prendre dans l'estimation (1).

Un exemple simple de forme linéaire sur H est donné par l'application $\ell_a : H \to \mathbb{R}$, définie à partir d'un élément fixé $a \in H$ par la formule suivante :

$$H \ni x \longmapsto \langle x, a\rangle \in \mathbb{R};$$

une simple application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz révèle que cette application linéaire est continue, et que sa norme vaut $||\ell_a|| = ||a||$.

Le *théorème de représentation de Riesz* stipule que, réciproquement, toute forme linéaire continue sur l'espace de Hilbert H est nécessairement de la forme ci-dessus.

Théorème 1 (Théorème de représentation de Riesz)**.** *Soit H un espace de Hilbert réel et soit $\ell : H \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue sur H. Alors il existe un élement $a \in H$ tel que :*

$$\forall x \in H, \quad \ell(x) = \langle x, a\rangle, \tag{2}$$

et la norme d'opérateur de ℓ vaut $||\ell|| = ||a||$.

Remarque 1. *Rappelons que ces résultats s'étendent presque tels quels au cas où l'espace de Hilbert H n'est plus défini sur le corps des réels, mais sur le corps des complexes $\mathbb{C}$. Dans ce cas, il convient de prendre garde (notamment dans l'écriture (2) de la représentation de ℓ) au fait que le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire par rapport à la première variable, et antilinéaire par rapport à la seconde variable, i.e.:*

$$\forall x, y, z \in H,\ \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C},\ \ \langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle,$$

et :

$$\forall x, y, z \in H,\ \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C},\ \ \langle z, \lambda x + \mu y \rangle = \overline{\lambda} \langle z, x \rangle + \overline{\mu} \langle z, y \rangle.$$

Enoncé: Soit H un espace de Hilbert (que l'on choisit réel pour simplifier), et soit $T : H \to H$ une application linéaire continue qui vérifie la propriété suivante :

$$\exists M > 0 \text{ t. q. } \forall x \in H,\ \ M||x|| \leq ||Tx||. \tag{3}$$

(i) Montrer que l'application T est injective.

(ii) On note $\mathrm{Im}(T) := \{Tx,\ \ x \in H\}$ l'espace vectoriel image de T. Montrer que $\mathrm{Im}(T)$ est un sous-espace vectoriel complet de H.

(iii) Montrer que pour tout $x \in H$, il existe un unique élément $b \in \mathrm{Im}(T)$ tel que :

$$||x - b|| = \inf_{y \in \mathrm{Im}(T)} ||x - y||.$$

(iv) On suppose maintenant en outre que T est un opérateur *auto-adjoint*, c'est-à-dire que l'on a :

$$\forall x, y \in H,\ \ \langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle. \tag{4}$$

Montrer qu'alors T est bijective.

(v) Soit $A : H \to H$ une application linéaire continue et auto-adjointe, telle qu'il existe une constante $C > 0$ satisfaisant la condition :

$$\forall x \in H, \qquad \inf_{\substack{x \in H \\ ||x|| = 1}} |\langle Ax, x \rangle| = C.$$

Montrer que T est bijective.

(i): Soit $x \in H$ un élément tel que $Tx = 0$. Il s'agit de montrer que $x = 0$. Pour cela, par la propriété (3), on a, si $x \in H$ est tel que $Tx = 0$,

$$M||x|| \leq 0, \text{ et donc } ||x|| = 0.$$

Ainsi $x = 0$, et T est injective.

(ii): On sait déjà que H est un espace vectoriel complet (c'est un espace de Hilbert) ; or les sous-espaces vectoriels complets d'un espace complet sont exactement ses sous-espaces vectoriels fermés. Il suffit donc de prouver que $\mathrm{Im}(T)$ est un sous-espace vectoriel fermé de H : c'est ce que nous allons faire.

Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathrm{Im}(T)$, qui converge vers un certain élément $y \in H$; on veut montrer que $y \in \mathrm{Im}(T)$. L'hypothèse $y_n \in \mathrm{Im}(T)$ implique que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in H$ tel que $y_n = Tx_n$. A priori, on n'a aucune idée du comportement de la suite x_n ; nous allons néanmoins démontrer qu'elle converge en montrant qu'elle est de Cauchy.

Remarquons pour cela que, par la propriété (3), on a, pour tous $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} M||x_n - x_m|| &\leq ||T(x_n - x_m)||, \\ &= ||y_n - y_m||. \end{aligned} \tag{5}$$

Or, la suite $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et donc est de Cauchy (noter qu'ici, on n'utilise pas le caractère complet de H). Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n, m \geq N, \quad ||y_n - y_m|| < M\varepsilon.$$

Insérant cette inégalité dans (5), il vient :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n, m \geq N, \quad ||x_n - x_m|| < \varepsilon,$$

et donc, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy d'éléments de H. Comme H est un espace de Hilbert, il existe $x \in H$ tel que $x_n \xrightarrow{n \to \infty} x$.

Finalement, par continuité de l'application linéaire T, la suite $y_n = Tx_n$ converge vers Tx. Mais on sait déjà que y_n converge vers y. Par unicité de la limite, on a donc $y = Tx$, ce qui prouve que $y \in \mathrm{Im}(T)$. On a bien prouvé que $\mathrm{Im}(T)$ est un sous-espace fermé, donc complet de H.

(iii): Puisque $\mathrm{Im}(T)$ est un sous-espace vectoriel fermé de H, le théorème de projection sur un sous-espace vectoriel fermé de H (rappelé un peu plus bas, dans la Section 2) s'applique directement : pour tout $x \in H$, il existe un unique élément $b \in H$ – la projection orthogonale de x sur $\mathrm{Im}(T)$ – tel que :

$$||x - b|| = \inf_{y \in \mathrm{Im}(T)} ||x - y||.$$

(iv): On sait déjà que T est injective ; pour démontrer qu'elle est bijective, il s'agit de voir que :

$$\forall y \in H, \ \exists x \in H, \ Tx = y,$$

ce qui est équivalent à dire que : $\mathrm{Im}(T) = H$.

Or, $\mathrm{Im}(T)$ est un sous-espace fermé de H. Ainsi, on a l'équivalence :

$$\mathrm{Im}(T) = H \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(T)^{\perp} = \{0\}\,.$$

En effet:

- Si $\mathrm{Im}(T) = H$, en passant à l'orthogonal, on a tout de suite :

$$\mathrm{Im}(T)^{\perp} = H^{\perp} = \{0\}\,.$$

- Réciproquement, si $\mathrm{Im}(T)^{\perp} = \{0\}$, en prenant l'orthogonal, on a :

$$(\mathrm{Im}(T)^{\perp})^{\perp} = H,$$

  et puisque $\mathrm{Im}(T)$ est fermé, on a $(\mathrm{Im}(T)^{\perp})^{\perp} = \mathrm{Im}(T)$ (voir l'exercice 1 du TD 6). Donc $\mathrm{Im}(T) = H$.

On est ainsi amenés à montrer que $\mathrm{Im}(T)^{\perp} = \{0\}$. Soit $y \in H$ un élément orthogonal à $\mathrm{Im}(T)$; alors :

$$\forall x \in H, \ \langle Tx, y \rangle = 0,$$

et donc, par la propriété (4) :

$$\forall x \in H, \ \langle x, Ty \rangle = 0,$$

ce qui implique $Ty = 0$. Puisque T est injective, ceci implique encore $y = 0$. Ainsi, $\mathrm{Im}(T)^{\perp} = \{0\}$, et donc $\mathrm{Im}(T) = H$, comme attendu.

(v): On s'attend bien entendu à devoir réutiliser les questions précédentes. Pour ce faire, il nous suffit simplement de voir que A satisfait une inégalité de la forme (3), pour une certaine constante $M > 0$. Or, pour tout $x \in H$, $x \neq 0$ on a, par hypothèse :

$$C \leq \left\langle A\frac{x}{||x||}, \frac{x}{||x||} \right\rangle,$$

inégalité qui se prolonge immédiatement au cas où $x = 0$. Ainsi,

$$C||x||^2 \leq \langle Ax, x \rangle.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur le second membre, il vient :

$$\forall x \in H, \quad C||x||^2 \leq ||Ax||||x||.$$

En divisant les deux membres de cette inégalité par $||x||$ (lorsque $x \neq 0$), on a donc :

$$\forall x \in H \setminus \{0\}\,, \quad C||x|| \leq ||Ax||,$$

inégalité qui s'étend bien sûr au cas où $x = 0$. Ceci permet de conclure.

2. Exercice 2 : Une variante du théorème de projection, sur un sous-espace affine fermé

Ce second exercice utilise (encore) de manière décisive le théorème de projection sur une partie convexe et fermée d'un espace de Hilbert, dont on rappelle l'énoncé ci-dessous (dans le cas où l'espace H est réel) :

Théorème 2 (Théorème de projection sur un convexe fermé)**.** *Soit H un espace de Hilbert réel, et soit $C \subset H$ une partie convexe et fermée de H. Alors, pour tout $x \in H$, il existe un unique élément $p \in C$ tel que :*

$$||x-p|| = \min_{y \in C} ||x-y||. \tag{6}$$

Cet élément est appelé projection de x sur la partie C ; on le note $p = p_C(x)$; il est également caractérisé comme l'unique point $p \in C$ tel que :

$$\forall z \in C, \quad \langle x-p, p-z \rangle \geq 0.$$

Ce résultat est illustré sur la Figure 1. Rappelons également qu'il admet une simplification particulièrement utile dans le cas où la partie convexe fermée C est un sous-espace vectoriel fermé F de H.

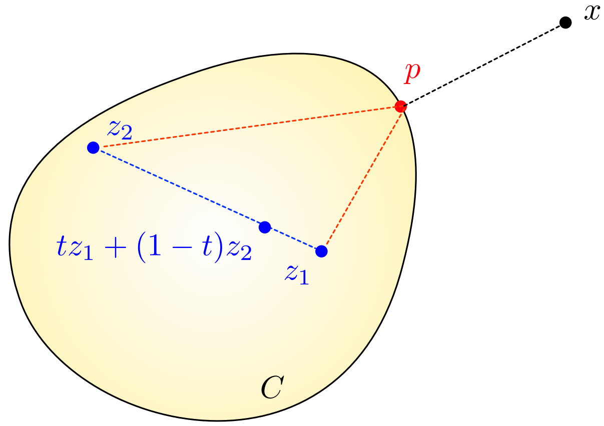

Figure 1. *La projection p de x sur le convexe fermé C est telle que, pour tout élément $z \in C$, le vecteur (orienté) $(z-p)$ "tourne le dos" à $(x-p)$, au sens où le produit scalaire $\langle z-p, x-p \rangle$ est négatif.*

Corollaire 3. *Soit F un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H. Alors,*

(i) Pour tout point $x \in H$, la projection $p_F(x)$, définie par (6), est l'unique point a de H satisfaisant les deux propriétés :

$$\left\{ \begin{array}{c} a \in F, \\ \forall y \in F, \ \langle x-a, y \rangle = 0. \end{array} \right. \tag{7}$$

(ii) La projection p_F est une application linéaire continue de H dans F.

(iii) On a la décomposition "orthogonale" en sous-espaces supplémentaires :

$$H = F \oplus F^{\perp}.$$

Enoncé: Soit H un espace de Hilbert réel. Définir la fonction de projection orthogonale sur un sous-espace affine fermé de H.

Cet exercice est très facile, pour peu que l'on ait une bonne intuition de ce que doit être cette projection orthogonale.

Commençons par rappeler qu'un sous-espace affine fermé A de H est caractérisé par la donnée d'un sous-espace vectoriel fermé $F \subset H$ et d'un élément $a \in H$, via la formule :

$$A = \{a + x, \ x \in F\},$$

i.e. A est l'ensemble des translatés des éléments de F par le vecteur (fixe) a.

Intuitivement, la situation est celle de la figure 2 : pour calculer la projection orthogonale $p_A(x)$ d'un point x sur A, on s'attend à devoir

(1) Translater x par le vecteur a qui fait passer de F à A ; ceci revient à regarder le point $(x-a)$;
(2) Projeter ce point $(x-a)$ sur le sous-espace vectoriel fermé F de H, donnant $p_F(x-a)$;
(3) "Renvoyer" le projeté obtenu sur l'espace affine A, donnant $a + p_F(x-a)$.

En d'autres termes, on s'attend à ce que :

$$\forall x \in H,\;\; p_A(x) = a + p_F(x-a).$$

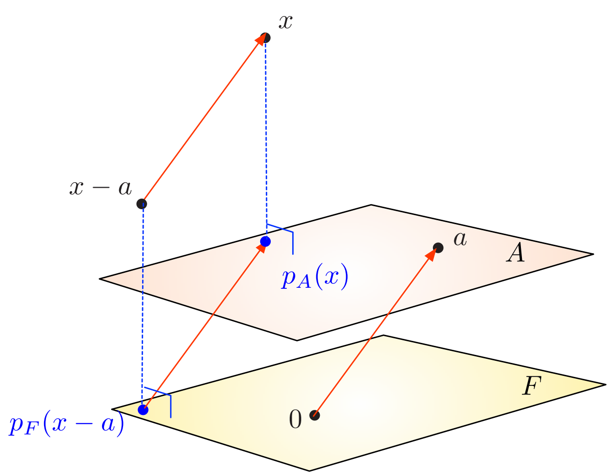

Figure 2. *La projection orthogonale $p_A(x)$ de x sur le sous-espace affine A s'obtient en faisant la projection orthogonale $p_F(x-a)$ du vecteur $(x-a)$ associé à x, sur l'espace vectoriel F sous-jacent, puis en re-translatant le résultat par a.*

Passons à la preuve de ce résultat. On peut vérifier que A est un sous-ensemble convexe et fermé de H : pour la convexité, par exemple, si l'on prend $a+x$ et $a+y$ dans A (avec $x, y \in F$), on a, pour tout $t \in [0,1]$,

$$t(a+x) + (1-t)(a+y) = a + \underbrace{(tx + (1-t)y)}_{\in F}.$$

De même, on montre facilement que A est une partie fermée de H.

On peut donc appliquer le théorème de projection (voir le Théorème 2 plus haut) sur la partie convexe fermée A de l'espace de Hilbert H : pour tout point $x \in A$, la projection de x sur A est l'unique solution du problème de minimisation suivant :

$$||x-p|| = \min_{p \in A} ||x-p||;$$

cet élément $p = p_A(x)$ est également caractérisé par :

$$\forall (a+z) \in A,\;\; \langle x-p, p-(a+z)\rangle \geq 0,$$

c'est-à-dire :

$$\forall z \in F,\;\; \langle x-p, p-a-z\rangle \geq 0,$$

ou encore :

$$\forall z \in F,\;\; \langle x-a-(p-a), p-a-z\rangle \geq 0.$$

Toujours en vertu du théorème de projection (en utilisant notamment l'assertion d'unicité), appliqué cette fois-ci au convexe fermé F, on en déduit que $(p-a)$ est la projection $p_F(x-a)$ de $x-a$ sur F.

Ceci achève de prouver que :

$$p = p_A(x) = a + p_F(x-a).$$

3. Exercice 3 : l'espace de Hilbert des suites de carré sommable

Cet exercice s'inscrit dans le cadre d'un espace de Hilbert défini sur le corps des nombres complexes. De manière générale, les espaces de Hilbert complexes jouissent de propriétés tout à fait analogues à celles des espaces réels ; il convient toutefois d'être soigneux quant à la présence de quantités conjuguées dans nombres d'énoncés et de formules.

Rappelons la définition d'un produit scalaire sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Définition 2. *Soit H est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ; on appelle produit scalaire sur H une application*

$$H \times H \ni (x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{C}$$

qui vérifie les quatre propriétés suivantes :

(i) L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est à symétrie Hermitienne :

$$\forall x, y \in H, \ \ \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}.$$

(ii) L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire par rapport à la première variable :

$$\forall x, y, z \in H, \ \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \ \ \langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle,$$

et anti-linéaire par rapport à la seconde :

$$\forall x, y, z \in H, \ \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \ \ \langle z, \lambda x + \mu y \rangle = \overline{\lambda} \langle z, x \rangle + \overline{\mu} \langle z, y \rangle.$$

(iii) L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est positive :

$$\forall x \in H, \ \ \langle x, x \rangle \ \textit{est un réel} \ \geq 0.$$

(iv) L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive :

$$\forall x \in H, \ \ \Big(\langle x, x \rangle = 0 \Big) \quad \Leftrightarrow \quad \Big(x = 0 \Big).$$

De même que dans le cas réel, un produit scalaire sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel H satisfait l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

Proposition 4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Soit H un espace préhilbertien complexe ; alors,*

$$\forall x, y \in H, \quad |\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \, \langle y, y \rangle, \tag{8}$$

où l'égalité a lieu si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $x = \lambda y$.

Il résulte de cette inégalité que l'application

$$H \in x \longmapsto ||x|| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \tag{9}$$

est une norme sur H, exactement comme dans le cas d'un espace réel.

Définition 3. *Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert s'il est un espace vectoriel complet, une fois muni de la norme (9) induite par le produit scalaire.*

Puisque nous allons être conduits à manipuler la complétude d'un tel espace H en termes de suites de Cauchy, rappelons les principaux ingrédients associés à ces notions.

Définition 4. *Soit $(E, || \cdot ||)$ un espace vectoriel normé. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E est de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \ \forall n, m \geq N, \ \ ||x_n - x_m|| < \varepsilon.$$

Grossièrement, une suite de Cauchy est une suite dont les termes x_n "se rapprochent de plus en plus les uns des autres" à mesure que l'on progresse vers $n \to \infty$. Rappelons que :

- Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un élément $x \in E$ est de Cauchy.
- À l'inverse, une suite de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée :

$$\exists M > 0 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \ \ ||x_n|| \leq M.$$

- Pour autant, il n'est pas toujours vrai qu'une suite de Cauchy converge vers un élément de E : ceci n'est garanti que lorsque l'espace vectoriel normé E est *complet*.

Enoncé: Soit $\ell^2(\mathbb{C})$ l'ensemble des suites complexes de carré sommable :

$$\ell^2(\mathbb{C}) = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}.$$

(i) Montrer que $\ell^2(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel.

(ii) Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$, définie par :

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{C}), \quad \langle (x_n), (y_n) \rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \overline{y_n} \tag{10}$$

est un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{C})$.

(iii) Montrer que $(\ell^2(\mathbb{C}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert.

(i): Il s'agit de montrer que, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux éléments de $\ell^2(\mathbb{C})$ (i.e. deux suites de carré sommable), et si λ, $\mu \in \mathbb{C}$, la combinaison linéaire $(\lambda x_n + \mu y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est encore de carré sommable. Pour ce faire, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on étudie la somme partielle associée à cette suite :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N} |\lambda x_n + \mu y_n|^2 &\leq \sum_{n=0}^{N} (|\lambda||x_n| + |\mu||y_n|)^2 \\ &\leq \sum_{n=0}^{N} (2|\lambda|^2|x_n|^2 + 2|\mu|^2|y_n|^2) \\ &= 2|\lambda|^2 \sum_{n=0}^{N} |x_n|^2 + 2|\mu|^2 \sum_{n=0}^{N} |y_n|^2, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'inégalité triangulaire à la première ligne, ainsi que l'inégalité facile

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \ (a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2 {}^*$$

pour passer de la première ligne à la seconde. Ainsi, on a, pour tout $N \geq 0$,

$$\sum_{n=0}^{N} |\lambda x_n + \mu y_n|^2 \leq 2|\lambda|^2 \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 + 2|\mu|^2 \sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^2,$$

où le terme de droite est une quantité finie, indépendente de N, puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{C})$. On en déduit que la suite $(\lambda x_n + \mu y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient bien à $\ell^2(\mathbb{C})$. Cet espace est donc bien un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

(ii): On vérifie que la formule

$$\langle (x_n), (y_n) \rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \overline{y_n}$$

vérifie les quatre axiomes de la notion de produit scalaire :

- *Symétrie Hermitienne :* Pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{C})$, on a :

$$\begin{aligned} \langle (x_n), (y_n) \rangle &= \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \overline{y_n} \\ &= \overline{\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n \overline{x_n}} \\ &= \overline{\langle (y_n), (x_n) \rangle}, \end{aligned}$$

  ce qui est l'identité voulue.

*Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on voit en développant $(a-b)^2 \geq 0$ que $2ab \leq a^2 + b^2$. Ainsi, $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq 2a^2 + 2b^2$.

- *Linéarité par rapport à la première variable :* Pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{C})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a :
$$\begin{aligned} \langle(\lambda x_n + \mu y_n), (z_n)\rangle &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda x_n + \mu y_n)\overline{z_n} \\ &= \lambda \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \overline{z_n} + \mu \sum_{n\in\mathbb{N}} y_n \overline{z_n} \\ &= \lambda\langle(x_n), (z_n)\rangle + \mu\langle(y_n), (z_n)\rangle, \end{aligned}$$
d'où la linéarité attendue.
- *Positivité :* Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{C})$,
$$\langle(x_n), (x_n)\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2$$
est bien une quantité réelle et positive.
- *Définie positivité :* Si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{C})$ est telle que $\langle(x_n), (x_n)\rangle = 0$, il vient :
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 = 0.$$
Chaque terme de la somme ci-dessus étant positif, ceci implique que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n| = 0$, et donc $x_n = 0$. La suite (x_n) est donc nulle.

Ainsi, on a prouvé que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ donnée par (10) est un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{C})$.

(iii): Il nous faut maintenant montrer que l'espace $\ell^2(\mathbb{C})$ est complet pour la norme induite par le produit scalaire (10). Cette norme s'écrit :
$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{C}),\ \ ||(x_n)|| = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$
Soit donc $x^m = (x_n^m)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de $\ell^2(\mathbb{C})$. Précisons les notations : on désigne par un exposant ^{m} le numéro de l'élément x^m dans cette suite de Cauchy (qui est lui-même une suite de $\ell^2(\mathbb{C})$), et par l'indice $_n$ les termes $x_n^m \in \mathbb{C}$ de chaque élément x^m. Ainsi, chaque x^m est une suite (infinie) dans $\ell^2(\mathbb{C})$, qui s'écrit :
$$x^m = (x_0^m, x_1^m, x_2^m, \ldots).$$
Puisque x^m est de Cauchy dans $\ell^2(\mathbb{C})$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0,\ \forall m, p \geq M,\ ||x^m - x^p||^2 < \varepsilon. \tag{11}$$

L'inégalité ci-dessus signifie exactement que :
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n^m - x_n^p|^2 < \varepsilon.$$
Ainsi, on a en particulier, pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$:
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0,\ \forall m, p \geq M,\ |x_n^m - x_n^p|^2 < \varepsilon.$$
Ceci dit exactement que la suite de nombres complexes $(x_n^m)_{m\in\mathbb{N}}$ (qui est donc la suite des $n^{\text{èmes}}$ composantes de la "suite de suites" x^m) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$. Celle-ci admet donc une limite, que l'on note $x_n^* \in \mathbb{C}$.

Il est maintenant tentant de dire que la suite $x^* := (x_0^*, x_1^*, x_2^*, \ldots)$, qui a pour composantes les limites des composantes de x^m est la limite de la suite x^m dans $\ell^2(\mathbb{C})$, mais cela n'a rien d'immédiat. Pour commencer, on ne sait même pas si l'objet x^* appartient bien à $\ell^2(\mathbb{C})$.

Vérifions ce dernier point. Comme une suite de Cauchy est bornée (indépendamment du fait que l'espace vectoriel considéré est complet ou non), il existe $C > 0$ telle que :
$$\forall m \in \mathbb{N}, \qquad ||x^m||^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n^m|^2 \leq C.$$

En particulier, pour tout $N \geq 0$, on a :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{n=0}^{N} |x_n^m|^2 \leq C.$$

Passant à la limite dans cette inégalité (car chaque terme x_n^m converge vers x_n^*, et car la somme ci-dessus ne comporte qu'un nombre fini de termes), on a :

$$\sum_{n=0}^{N} |x_n^*|^2 \leq C.$$

Comme ceci est vrai quel que soit $N \in \mathbb{N}$ (et avec toujours la même valeur de la constante C), on en déduit que la série $\sum\limits_{n=0}^{N} |x_n^*|^2$ de terme général positif converge, i.e. $x^* = (x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien dans $\ell^2(\mathbb{C})$.

Montrons maintenant que x^m converge vers cet élément x^* dans $\ell^2(\mathbb{C})$, c'est-à-dire que :

$$||x^m - x^*||^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n^m - x_n^*|^2 \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

Pour ce faire, on aimerait passer à la limite dans la relation (11) exprimant le fait que x^m est de Cauchy ; malheureusement, ceci est rendu délicat par la présence d'une somme infinie, qui nécessiterait le recours aux théorèmes d'interversion somme-limite... Pour contourner cette difficulté, on va ré-utiliser l'astuce précédente, permettant de se ramener à une somme finie. On a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0,\ \forall N \geq 0, \forall m, p \geq M,\ \sum_{n=0}^{N} |x_n^m - x_n^p|^2 < \varepsilon.$$

Passant à la limite lorsque $p \to \infty$, il vient :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0,\ \forall N \geq 0, \forall m \geq M,\ \sum_{n=0}^{N} |x_n^m - x_n^*|^2 < \varepsilon,$$

et donc :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0,\ \ \forall m \geq M,\ \sum_{n=0}^{\infty} |x_n^m - x_n^*|^2 < \varepsilon.$$

Ceci exprime exactement que x^m converge vers x^* dans $\ell^2(\mathbb{C})$.

4. Exercice 4: De l'importance de l'hypothèse de fermeture dans le théorème de projection sur un sous-espace fermé

Enoncé: Soit $\ell^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles de carré sommable :

$$\ell^2(\mathbb{R}) = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 < \infty \right\},$$

muni du produit scalaire

$$\forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \langle x, y\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n.$$

On a montré dans l'exercice 3 (dans le cas complexe, qui se traite de manière tout à fait identique) que $\ell^2(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert. On introduit le sous-espace vectoriel $F \subset \ell^2(\mathbb{R})$ des suites nulles à partir d'un certain rang :

$$F = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{R}),\ \exists p \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq p,\ x_n = 0 \right\}.$$

(i) Montrer que F n'est pas fermé.
(ii) Montrer que F est dense dans $\ell^2(\mathbb{R})$.
(iii) Montrer qu'il existe un élément $x \in \ell^2(\mathbb{R})$ tel que

$$\forall y \in F,\ z \in F^{\perp}, \quad x \neq y + z.$$

Nous allons commencer par traiter la question (ii), relative à la densité de F dans $\ell^2(\mathbb{R})$. Soit donc $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\ell^2(\mathbb{R})$ fixé; on recherche une suite $x^m = (x_n^m)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F telle que

$$||x - x_m||^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n - x_n^m|^2 \xrightarrow{m\to\infty} 0. \tag{12}$$

Notons que l'on réutilise ici les notations introduites à l'exercice 3 : pour tout indice $m \in \mathbb{N}$, x^m désigne un élément de $\ell^2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une suite de carré sommable, dont on note les termes $x^m = (x_1^m, x_2^m, \ldots)$. Ainsi, pour chaque $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, x_n^m désigne le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite x^m (qui constitue elle-même le $m^{\text{ème}}$ terme de la suite $(x^m)_{m\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\ell^2(\mathbb{R})$).

Une idée naturelle pour construire des éléments $x^m \in \ell^2(\mathbb{R})$ satisfaisant (12) est de définir x^m comme la suite dont les m premiers termes coincident avec ceux de x, et dont tous les autres sont nuls ; formellement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n^m = \begin{cases} x_n & \text{si } n \le m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par construction, chaque élément x^m appartient à F, et il reste à vérifier que la convergence (12) a bien lieu. À cet effet, la définition même de $x^m \in \ell^2(\mathbb{R})$ implique que :

$$||x - x^m||^2 = \sum_{n=m+1}^{\infty} |x^n|^2,$$

quantité qui converge vers 0 lorsque $m \to \infty$, en tant que suite des restes de la série convergente $\Sigma |x_n|^2$.

Ainsi, on a prouvé que pour chaque $x \in \ell^2(\mathbb{R})$, il existe une suite $x^m \in F$ telle que $x^m \xrightarrow{m\to\infty} x$, c'est-à-dire que F est dense dans $\ell^2(\mathbb{R})$.

Traitons maintenant la question (i). On raisonne par l'absurde en supposant que F est fermé, i.e. $F = \overline{F}$. Comme nous venons de montrer que F est dense dans $\ell^2(\mathbb{R})$, i.e. $\overline{F} = \ell^2(\mathbb{R})$, on aurait alors $F = \ell^2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que toute suite de carré sommable serait en fait nulle à partir d'un certain rang. C'est bien entendu faux ! Pour s'en convaincre, il suffit par exemple de considérer la suite x de terme général $x_n = \frac{1}{n}$; celle-ci est bien de carré sommable, alors que tous ses termes sont non nuls.

Ainsi, F ne peut être fermé.

Traitons finalement la question (iii). Encore une fois, la densité de F dans $\ell^2(\mathbb{R})$ implique que

$$F^\perp = (\overline{F})^\perp = (\ell^2(\mathbb{R}))^\perp = \{0\}\,,$$

où la première égalité vient de ce que $A^\perp = (\overline{A})^\perp$ pour toute partie A d'un espace préhilbertien (cf. exercice 1 du TD 1).

Ainsi, raisonnant par l'absurde, si chaque élément $x \in \ell^2(\mathbb{R})$ pouvait s'écrire sous la forme $x = y + z$, pour certains $y \in F$, $z \in F^\perp$, il s'ensuivrait que chaque élément $x \in \ell^2(\mathbb{R})$ pourrait s'écrire sous la forme $x = y$, pour un certain $y \in F$, et appartiendrait donc à F. En d'autres termes, on aurait alors $F = \ell^2(\mathbb{R})$... ce qui n'est pas le cas, comme on l'a dit plus haut.

Ainsi, on a prouvé qu'il existe au moins un élément $x \in \ell^2(\mathbb{R})$ tel que

$$\forall y \in F,\ z \in F^\perp, \quad x \ne y + z.$$

Remarque 2. *Cet exercice souligne que l'hypothèse selon laquelle F doit être fermé est indispensable pour appliquer le théorème de projection sur un sous-espace fermé F d'un espace de Hilbert H (cf. Corollaire 3 rappelé plus haut).*