CORRECTION DU TD 1 : GÉNÉRALITÉS AUTOUR DES ESPACES DE HILBERT (I)

Contents

1. Quelques rappels de cours concernant les espaces préhilbertiens et hilbertiens

1.1. Les espaces préhilbertiens.

Pour simplifier, on se place dans le cadre réel.

Définition 1. *Soit H un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ; on appelle produit scalaire sur H une application*

$$H \times H \ni (x,y) \longmapsto \langle x,y\rangle \in \mathbb{R}.$$

qui vérifie les quatre propriétés suivantes :

(i) L'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est symétrique :

$$\forall x,y \in H,\ \ \langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle.$$

(ii) L'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est bilinéaire :

$$\forall x,y,z \in H,\ \ \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R},\ \ \langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x,z\rangle + \mu\langle y,z\rangle \text{ (linéarité par rapport à la } 1^{\text{ère}} \text{ variable)},$$

et :

$$\forall x,y,z \in H,\ \ \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R},\ \ \langle z, \lambda x + \mu y\rangle = \lambda\langle z,x\rangle + \mu\langle z,y\rangle \text{ (linéarité par rapport à la } 2^{\text{ème}} \text{ variable)}.$$

(iii) L'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est positive :

$$\forall x \in H,\ \ \langle x,x\rangle \geq 0.$$

(iv) L'application $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est définie positive :

$$\forall x \in H,\ \ \Big(\langle x,x\rangle = 0\Big) \quad \Leftrightarrow \quad \Big(x = 0\Big).$$

L'espace H muni d'un tel produit scalaire $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est dit préhilbertien.

Rappelons à présent une inégalité fondamentale dans les espaces préhilbertiens :

Proposition 1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Soit H un espace préhilbertien (réel) ; alors,*

$$\forall x,y \in H, \quad |\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle\,\langle y,y\rangle, \tag{1}$$

où l'égalité a lieu si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda y$.

Démonstration. Par positivité du produit scalaire, on a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle \geq 0,$$

avec égalité si et seulement si $x = -\lambda y$. En développant le carré scalaire ci-dessus, il vient :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda^2 \langle y, y \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \langle x, x \rangle \geq 0.$$

Ainsi, le polynôme du second degré $P(\lambda) = \lambda^2 \langle y, y \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \langle x, x \rangle$ prend des valeurs positives sur $\mathbb{R}$, et son discriminant est donc négatif, ce qui s'écrit :

$$4\langle x, y \rangle^2 - 4\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0,$$

d'où l'inégalité souhaitée (1).

Soit maintenant $x, y \in H$ tels que (1) soit une égalité. Le calcul précédent révèle qu'alors, le discriminant du polynôme $P(\lambda) = \lambda^2 \langle y, y \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \langle x, x \rangle$ est nul ; $P(\lambda)$ admet donc une racine réelle double. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = 0$. Par définie positivité du produit scalaire, ceci implique que $x = -\lambda y$: on a bien prouvé que l'égalité ne peut avoir lieu dans (1) que lorsque x et y sont multiples scalaires l'un de l'autre. □

L'une des conséquences de cette inégalité est que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induit une *norme* sur H, définie par :

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

On montre en effet que cette application satisfait les trois axiomes suivants :

(i) *(Homogénéité positive)* Si $x \in H$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a : $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$ (par bilinéarité de $\langle \cdot, \cdot \rangle$).
(ii) *(Positivité et définie positivité)* Pour tout $x \in H$, la quantité $||x||$ est positive ; elle est nulle si et seulement si $x = 0$ (ceci est une conséquence de la positivité et de la définie positivité du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$).
(iii) *(Inégalité triangulaire)* Pour tous $x, y \in H$, $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (ceci découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

Un autre corollaire utile de l'inégalité de Cauchy-Schwarz est le suivant.

Corollaire 2. *Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, muni de la norme $|| \cdot ||$ induite par le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Pour chaque élément $y \in H$, l'application linéaire :*

$$H \ni x \longmapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$$

est continue.

Démonstration. L'inégalité de Cauchy-Schwarz (1) produit :

$$\forall x \in H, \ |\langle x, y \rangle| \leq ||x|| ||y||,$$

ce qui est exactement la continuité attendue. □

Finalement, on rappelle la définition suivante :

Définition 2. *soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien ; l'orthogonal $A^\perp$ d'une partie non vide $A \subset H$ est l'ensemble :*

$$A^\perp := \{x \in H, \ \forall a \in A, \ \langle x, a \rangle = 0\}.$$

Remarque 1. *Un élément de H qui est orthogonal à tout élément de H est en particulier orthogonal à lui-même, et donc est nul.*

1.2. **Suites de Cauchy et espaces complets.**

Commençons par une définition :

Définition 3. *Soit* $(E, ||\cdot||)$ *un espace vectoriel normé. Une suite* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* E *est de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq N,\ ||x_n - x_m|| < \varepsilon.$$

En d'autres termes, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si ses termes sont "de plus en plus proches" l'un de l'autre alors que $n \to \infty$.

Cette propriété est intimiment liée à la convergence de la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Rappelons à ce titre que :

- Une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments d'un espace vectoriel normé E qui converge vers un élément $\ell \in E$ est toujours de Cauchy ;
- L'implication réciproque n'est malheureusement pas toujours vraie sans hypothèse additionnelle sur l'espace E. On dit que l'espace vectoriel normé E est *complet* lorsque toute suite de Cauchy d'éléments de E est convergente.

1.3. **Espaces de Hilbert.**

Utilisant les ingrédients rappelés dans les Sections 1.1 et 1.2, on introduit la définition :

Définition 4. *Un espace de Hilbert* H *est un espace préhilbertien, muni d'un produit scalaire* $\langle\cdot,\cdot\rangle$*, qui est complet pour la norme* $||\cdot||$ *induite par ce produit scalaire.*

Un espace de Hilbert jouit de nombreuses propriétés très commodes, dont beaucoup trouvent leur origine dans le *théorème de projection sur un convexe fermé*, que l'on rappelle ici, dans le cas réel :

Théorème 3 (Théorème de projection sur un convexe fermé)**.** *Soit* H *un espace de Hilbert réel, et soit* $C \subset H$ *une partie convexe et fermée de* H*. Alors, pour tout* $x \in H$*, il existe un unique élément* $p \in C$ *tel que :*

$$||x - p|| = \min_{y\in C} ||x - y||. \tag{2}$$

Cet élément est appelé projection de x *sur la partie* C *; on le note* $p = p_C(x)$ *; il est également caractérisé comme l'unique point* $p \in C$ *tel que :*

$$\forall z \in C, \quad \langle x - p, p - z\rangle \geq 0.$$

Ce résultat est illustré sur la Figure 2.

Ce théorème admet un corollaire fort utile dans le cas particulier où la partie convexe fermée C est un sous-espace vectoriel fermé F de H.

Corollaire 4. *Soit* F *un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert* H*. Alors,*

(i) Pour tout point $x \in H$*, la projection* $p_F(x)$*, définie par (2), est l'unique point* a *de* H *satisfaisant les deux propriétés :*

$$\left\{ \begin{array}{c} a \in F, \\ \forall y \in F,\ \langle x - a, y\rangle = 0. \end{array} \right. \tag{3}$$

(ii) La projection p_F *est une application linéaire continue de* H *dans* F*.*

(iii) On a la décomposition "orthogonale" en sous-espaces supplémentaires :

$$H = F \oplus F^{\perp}.$$

Ce résultat est illustré sur la Figure 2.

Démonstration. (i): Soit $x \in H$. Commençons par démontrer que $p_F(x)$ vérifie les deux propriétés (3). F étant une partie convexe fermée de H, le théorème 3 s'applique : pour tout $x \in H$, le point de projection $p_F(x)$ de x sur F vérifie :

$$p_F(x) \in F, \text{ et } \forall z \in F,\ \langle x - p_F(x), p_F(x) - z\rangle \geq 0. \tag{4}$$

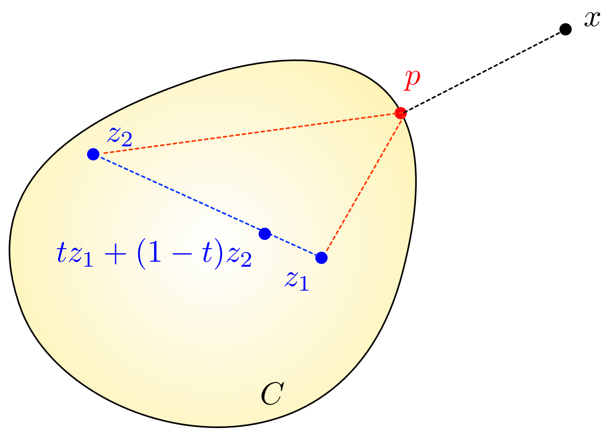

Figure 1. *Un ensemble $C \subset H$ est convexe si pour tous points $z_1, z_2 \in C$, le segment $\{tz_1 + (1-t)z_2,\ t \in [0,1]\}$ est entièrement inclus dans C. La projection p de x sur le convexe fermé C est telle que, pour tout élément $z \in C$, le vecteur (orienté) $(z-p)$ "tourne le dos" à $(x-p)$, au sens où le produit scalaire $\langle z-p, x-p\rangle$ est négatif.*

Or, F est un espace vectoriel. Ainsi, pour tout $y \in F$, $z = p_F(x) - y$ appartient à F, et l'inégalité ci-dessus donne :

$$\forall y \in F, \quad \langle x - p_F(x), y\rangle \geq 0.$$

Comme our tout $y \in F$, $-y$ appartient aussi à F, on a également :

$$\forall y \in F, \quad \langle x - p_F(x), -y\rangle \geq 0, \text{ et donc } \langle x - p_F(x), y\rangle \leq 0.$$

Ainsi, on a prouvé que pour tout $y \in F$, $\langle x - p_F(x), y\rangle = 0$.

Réciproquement, soit $x \in H$, et soit a est un point de H tel que :

$$a \in F, \text{ et } \forall y \in F, \ \langle x - a, y\rangle = 0;$$

il s'agit de montrer que $a = p_F(x)$. Pour n'importe quel élément $z \in F$, choisissant $y = a - z$ dans la relation ci-dessus, on voit que :

$$a \in F, \text{ et } \langle x - a, a - z\rangle \geq 0.$$

Or, $p_F(x)$ est l'unique point de F satisfaisant cette condition en vertu du théorème 3, ce qui implique que $a = p_F(x)$.

(ii): Commençons par montrer que p_F est linéaire. Soit pour ce faire $x_1, x_2 \in H$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$; on note $a_1 = p_F(x_1)$ et $a_2 = p_F(x_2)$ les projections de x_1 et x_2 sur F, respectivement. La projection $p_F(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$ de $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$ est l'unique point a dans F tel que :

$$\forall y \in F, \quad \langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - a, y\rangle = 0. \tag{5}$$

Mais on sait d'autre part par (i) que les projections a_1, a_2 de x_1, x_2 vérifient :

$$a_1, a_2 \in F, \text{ et } \forall y \in F, \quad \langle x_1 - a_1, y\rangle = 0, \text{ et } \langle x_2 - a_2, y\rangle = 0.$$

Donc, par combinaison linéaire :

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) \in F, \text{ et } \forall y \in F, \quad \langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2), y\rangle = 0.$$

Par unicité du point $a \in F$ satisfaisant (5), on en déduit que :

$$a = p_F(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) = \lambda_1 p_F(x_1) + \lambda_2 p_F(x_2),$$

et $x \mapsto p_F(x)$ est bien une application linéaire de H dans F.

Montrons à présent que $p_F : H \to F$ est continue. On sait pour cela que, pour tout $x \in H$,

$$\forall y \in F, \ \langle x - p_F(x), y\rangle = 0,$$

et donc, en prenant $y = p_F(x)$:

$$\langle p_F(x), p_F(x)\rangle = \langle x, p_F(x)\rangle.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne maintenant :

$$||p_F(x)||^2 \leq ||x||\, ||p_F(x)||.$$

Si $p_F(x) \neq 0$, on a donc :

$$||p_F(x)|| \leq ||x||,$$

inégalité qui se prolonge à l'évidence si $p_F(x) = 0$. Ceci achève de prouver la continuité de p_F.

(iii): On a déjà $F \cap F^\perp = \{0\}$. En effet, si $a \in F$ est également dans $F^\perp$, on a, pour tout $y \in F$, $\langle a, y\rangle = 0$, et donc en particulier $\langle a, a\rangle = 0$, soit $a = 0$.

Soit maintenant $x \in H$. Ecrivons :

$$x = p_F(x) + (x - p_F(x)).$$

Par définition, $p_F(x) \in F$. D'autre part, on a, par le point (i) :

$$\forall y \in F,\ \ \langle x - p_F(x), y\rangle = 0,$$

c'est-à-dire que $x - p_F(x)$ est dans $F^\perp$. Ainsi, on a prouvé que x se décompose comme somme d'un élément de F et d'un élément de $F^\perp$, ce qui termine la preuve.

□

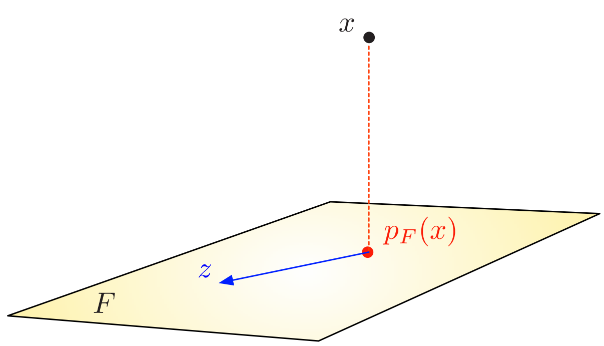

Figure 2. *Lorsque F est un sous-espace fermé de H, le vecteur $x - p_F(x)$ est orthogonal à tout élément $z \in F$.*

2. Exercice 1: relations d'orthogonalité dans les espaces Préhilbertiens et Hilbertiens

Enoncé: Soit H un espace préhilbertien (que l'on suppose réel, pour simplifier).

(i) Montrer que l'orthogonal $A^\perp$ d'une partie non vide $A \subset H$ est un sous-espace vectoriel fermé de H.
(ii) Soit $A \subset B$ deux parties non vides de H ; montrer que $B^\perp \subset A^\perp$.
(iii) Soit A une partie non vide de H ; montrer que $A \subset (A^\perp)^\perp$.
(iv) Soit A une partie non vide de H ; montrer que $(\overline{A})^\perp = A^\perp$.
(v) On suppose dans cette question que H est un espace de Hilbert, et on considère un sous-espace vectoriel A de H. Montrer que $\overline{A} = (A^\perp)^\perp$.

(i): Commençons par observer que $A^\perp$ est bien un sous-espace vectoriel de H. Soit pour cela $x, y \in A^\perp$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ quelconques. Pour tout élément $a \in A$, on a alors :

$$\begin{aligned} \langle \lambda x + \mu y, a\rangle &= \lambda\langle x, a\rangle + \mu\langle y, a\rangle, \\ &= 0, \end{aligned}$$

puisque x et y sont dans $A^\perp$. Ainsi, $(\lambda x + \mu y)$ appartient à $A^\perp$, qui est donc un sous-espace vectoriel de H.

Pour montrer que $A^\perp$ est fermé, considérons une suite x_n déléments de $A^\perp$ qui converge vers un certain $x \in H$. Par définition, pour chaque élément $a \in A$, on a $\langle x_n, a \rangle = 0$, et donc :

$$\begin{aligned} \langle x, a \rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle x_n, a \rangle, \\ &= 0, \end{aligned}$$

où la première ligne découle de la continuité de l'application $H \ni y \mapsto \langle y, a \rangle \in \mathbb{R}$ (voir le Corollaire 2 dans la section 1.1). Ceci montre que $x \in A^\perp$, qui est finalement un sous-espace vectoriel fermé de H.

(ii): Soit $x \in B^\perp$; par définition, pour tout $b \in B$, $\langle x, b \rangle = 0$. Or, tout élément $a \in A$ appartient à B par hypothèse, et donc : $\langle x, a \rangle = 0$, i.e. $x \in A^\perp$. Ceci prouve que $B^\perp \subset A^\perp$.

(iii): Soit $a \in A$; il s'agit de montrer que $a \in (A^\perp)^\perp$, c'est-à-dire que a est orthogonal à tout élément de $A^\perp$. Observons pour ce faire que l'on a, par *définition* de l'orthogonal $A^\perp$:

$$\forall x \in A^\perp, \ \langle a, x \rangle = 0.$$

Ceci peut également se lire : "$a \in A$ est orthogonal à tout élément $x \in A^\perp$", c'est-à-dire que $a \in (A^\perp)^\perp$. Puisque ceci est vrai pour tout $a \in A$, on a bien $A \subset (A^\perp)^\perp$, comme attendu.

(iv): On sait déjà par la question (ii) que $(\overline{A})^\perp \subset A^\perp$, puisque $A \subset \overline{A}$, si bien qu'il suffit de démontrer l'inclusion réciproque $A^\perp \subset (\overline{A})^\perp$. Soit pour cela $x \in A^\perp$; on veut montrer que $x \in (\overline{A})^\perp$, c'est-à-dire que pour tout $b \in \overline{A}$, $\langle x, b \rangle = 0$. Soit donc $b \in \overline{A}$; il existe une suite $a_n \in A$ telle que $a_n \to b$ dans H. Ainsi,

$$\begin{aligned} \langle x, b \rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle x, a_n \rangle, \\ &= 0, \end{aligned}$$

puisque $x \in A^\perp$. Ceci montre que $x \in (\overline{A})^\perp$, et donc $A^\perp \subset (\overline{A})^\perp$.

(v): On sait déjà, par la question (iii) que $\overline{A} \subset (\overline{A}^\perp)^\perp$. Puisque $\overline{A}^\perp = A^\perp$ par la question (iv), on a donc : $\overline{A} \subset (A^\perp)^\perp$. Notons que cette inclusion n'exige pas que A soit un sous-espace vectoriel de H, ni que H soit complet.

Montrons alors l'inclusion réciproque $(A^\perp)^\perp \subset \overline{A}$, et posons à cet effet $F = \overline{A}$, qui est un sous-espace vectoriel *fermé* de l'espace de Hilbert H. Soit $x \in (A^\perp)^\perp$; utilisant le théorème de projection sur un sous-espace fermé (Corollaire 4 ci-dessus), pour tout $x \in H$, il existe $a \in F$ et $y \in F^\perp = A^\perp$ tels que :

$$x = a + y, \ \text{et } \langle a, y \rangle = 0.$$

Alors, puisque $x \in (A^\perp)^\perp$, on a $\langle x, y \rangle = 0$. Prenant le produit scalaire de l'égalité ci-dessus avec y, on trouve :

$$\langle x, y \rangle = \langle a, y \rangle + ||y||^2.$$

Ainsi, on a : $||y|| = 0$, ce qui implique que $y = 0$. Il en résulte que $x = a \in F$, comme on le souhaitait. On a bien prouvé que $(A^\perp)^\perp \subset \overline{A}$.

3. Exercice 2: un espace de Hilbert "produit"

Enoncé: Soit H un espace de Hilbert réel, dont on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire, et $|| \cdot ||$ la norme associée. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ m réels strictement positifs. Pour tout $i = 1, \dots, m$, on note H_i l'espace de Hilbert H muni du produit scalaire :

$$\forall x, y \in H_i, \;\; \langle x, y \rangle_i := \alpha_i \langle x, y \rangle.$$

Introduisons finalement l'espace produit $\mathcal{H} := H_1 \times \dots \times H_m$. On pose :

$$\forall X = (x_1, \dots, x_m), \; Y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathcal{H}, \quad \langle\langle X, Y \rangle\rangle := \sum_{i=1}^m \alpha_i \langle x_i, y_i \rangle.$$

(i) Montrer que l'application $(X, Y) \mapsto \langle\langle X, Y \rangle\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{H}$. Montrer ensuite que $\mathcal{H}$ muni de ce produit scalaire est un espace de Hilbert.

(ii) Soit $\mathcal{A}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$ défini par :

$$\mathcal{A} = \{ X = (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{H}, \;\; x_1 = \dots = x_m \}.$$

- Montrer que $\mathcal{A}$ est fermé dans $\mathcal{H}$.
- Montrer que l'orthogonal de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{H}$ est :

$$\mathcal{A}^\perp = \left\{ Y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathcal{H}, \;\; \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i = 0 \right\}.$$

(iii) Montrer que pour tout $S \in \mathcal{H}$, il existe un unique couple $(X, Y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}^\perp$ tel que $S = X + Y$, et calculer X et Y.

(i): On montre que $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ vérifie chaque axiome de la définition d'un produit scalaire (voir la définition 1 ci-dessus):

- Il s'agit d'une application symétrique :

$$\forall X, Y \in \mathcal{H}, \;\; \langle\langle X, Y \rangle\rangle = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i y_i = \langle\langle Y, X \rangle\rangle.$$

- Il s'agit d'une application bilinéaire $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$; en effet, pour tous $X, Y, Z \in \mathcal{H}$, et λ, $\mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \langle\langle \lambda X + \mu Y, Z \rangle\rangle &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \left(\lambda x_i + \mu y_i \right) z_i, \\ &= \lambda \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i z_i + \lambda \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i z_i, \\ &= \lambda \langle\langle X, Z \rangle\rangle + \mu \langle\langle Y, Z \rangle\rangle, \end{aligned}$$

  ce qui montre la linéarité de cette application $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ par rapport à la première variable. Comme elle est symétrique, elle est également linéaire par rapport à la seconde variable, et donc bilinéaire.

- L'application $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ est positive, puisque pour tout $X \in \mathcal{H}$:

$$\langle\langle X, X \rangle\rangle = \sum_{i=1}^m \alpha x_i^2 \geq 0.$$

- Elle est définie positive, puisque si $X \in \mathcal{H}$ est tel que $\langle\langle X, X \rangle\rangle = 0$, alors :

$$\sum_{i=1}^m \alpha x_i^2 = 0.$$

  Chaque terme de cette somme étant positif, ceci implique que pour tout $i = 1, \dots, m$, $\alpha_i x_i^2 = 0$, et donc, comme $\alpha_i > 0$: $x_i = 0$. Ainsi, $X = (0, \dots, 0)$, et l'application $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ est définie positive.

Maintenant que nous savons que l'application $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ est un produit scalaire sur l'espace $\mathcal{H}$, nous pouvons définir une norme sur $\mathcal{H}$ par :

$$\forall X \in \mathcal{H}, \;\; ||X||_{\mathcal{H}} := \sqrt{\langle\langle X, X \rangle\rangle}.$$

Montrons que l'espace $\mathcal{H}$ muni du produit scalaire $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ est un espace de Hilbert. Il s'agit de prouver que c'est un espace complet, i.e. que toute suite de Cauchy au sens de la norme $||X||_{\mathcal{H}} := \sqrt{\langle\langle X, X\rangle\rangle}$ est une suite convergente.

Soit donc $X^n = (x_1^n, \ldots, x_m^n)$ une suite de Cauchy pour la norme $||\cdot||_{\mathcal{H}}$; remarquer dans cette notation (que l'on utilisera à plusieurs reprises dans ce corrigé pour des suites d'éléments de $\mathcal{H}$), l'indice $_i$ repère le numéro de la composante considérée alors que l'exposant ^{n} indique le rang dans la suite.

Par définition d'une suite de Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $n, p \geq N$,

$$||X^n - X^p||_{\mathcal{H}}^2 = \langle\langle X^n - X^p, X^n - X^p\rangle\rangle < \varepsilon,$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i ||x_i^n - x_i^p||^2 < \varepsilon.$$

En particulier, pour chaque $i = 1, \ldots, m$, puisque $\alpha_i > 0$, on a (quitte à changer N): pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $n, p \geq N$,

$$||x_i^n - x_i^p||^2 < \varepsilon,$$

et donc, $\{x_i^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Comme H est complet, on en déduit que x_i^n converge, lorsque $n \to \infty$ vers un certain élément de H que l'on note x_i^*. On a donc trouvé un candidat à la limite $X^* := (x_1^*, \ldots, x_m^*)$.

Il s'agit maintenant de montrer qu'en effet $X^n \to X^*$ dans $\mathcal{H}$. On écrit simplement :

$$||X^n - X^*||_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{i=1}^m \alpha_i ||x_i^n - x_i^*||^2,$$

et chaque terme de la somme (finie) ci-dessus tend vers 0 lorsque $n \to \infty$, par convergence de $\{x_i^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vers x_i^* pour chaque $i = 1, \ldots, m$. Ainsi, $||X^n - X^*||_{\mathcal{H}} \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

En résumé, on a montré que toute suite de Cauchy X^n d'éléments de $\mathcal{H}$ converge dans $\mathcal{H}$: cet espace est donc un espace de Hilbert.

(ii) Commençons par montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$. Pour cela, soit $X^n = (x_1^n, \ldots, x_m^n)$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, qui converge dans $\mathcal{H}$ vers un certain élément $X^* := (x_1^*, \ldots, x_m^*) \in \mathcal{H}$.

Alors, pour tout $i = 1, \ldots, m$, on a :

$$\alpha_i ||x_i^n - x_i^*||^2 \leq ||X^n - X^*||_{\mathcal{H}}^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

et donc, puisque $\alpha_i > 0$, $x_i^n \to x_i^*$ dans H. Ainsi, puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_1^n = \ldots = x_m^n,$$

passant à la limite, on obtient :

$$x_1^* = \ldots = x_m^*,$$

et donc X^* appartient encore à $\mathcal{A}$, qui est ainsi un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$.

Étudions maintenant l'orthogonal de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{H}$. Par définition, $X = (x_1, \ldots, x_m)$ appartient à $\mathcal{A}^\perp$ si et seulement si :

$$\forall A = (a, \ldots, a) \in \mathcal{A}, \quad \langle\langle X, A\rangle\rangle = 0,$$

et donc, si et seulement si :

$$\forall a \in H, \ \sum_{i=1}^m \alpha_i \langle x_i, a\rangle = 0.$$

Ceci est encore équivalent à ce que :

$$\forall a \in H, \ \left\langle \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i, a \right\rangle = 0.$$

Comme le seul élément d'un espace de Hilbert qui soit orthogonal à tout élément de cet espace est l'élément nul, on a bien prouvé que :

$$X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{A}^\perp \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i = 0,$$

ce qui est le résultat attendu.

(iii) Puisque $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$, le théorème de projection sur un sous-espace fermé (voir le corollaire 4 ci-dessus) affirme que pour chaque $S \in \mathcal{H}$, il existe un unique couple $(X, Y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}^\perp$ tel que :

$$S = X + Y.$$

De plus, $X = (x, \ldots, x) \in \mathcal{A}$ est la projection orthogonale $p_{\mathcal{A}}(S)$ de S sur $\mathcal{A}$, qui est l'unique élément de $\mathcal{A}$ tel que :

$$\forall Z \in \mathcal{A},\ \langle\langle S - X, Z \rangle\rangle = 0.$$

Autrement dit, compte tenu de la définition de $\mathcal{A}$, on a :

$$\forall z \in H,\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \langle s_i - x, z \rangle = 0,$$

et donc :

$$\forall z \in H,\ \left\langle \sum_{i=1}^{m} \alpha_i s_i - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x, z \right\rangle = 0.$$

Comme à la question précédente, on en déduit que :

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i s_i,$$

ce qui donne finalement :

$$X = (x, \ldots, x),\ \text{avec } x = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i s_i.$$

Enfin, $Y = S - X$ se calcule comme :

$$\forall j = 1, \ldots, m,\ y_j = s_j - x = s_j - \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i s_i.$$