Grenoble-INP **AFCD**
ENSIMAG
2ème année

TP AFCD

Exercice 1 *Calcul approché d'un spectre*
Soit f un signal tel que $supp(\hat{f}) \subset [-\lambda_c, \lambda_c]$ (i.e. $\hat{f} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier étant comprise au sens des distributions). Nous avons vu en cours que dans ce cas, nous avons la forme duale de la formule de Poisson:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda - \frac{n}{a}) = a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(na) e^{-2i\pi na\lambda}.$$

Donc si $a < \frac{1}{2\lambda_c}$ on obtient:

$$\forall \lambda \in [-\lambda_c, \lambda_c] \; \hat{f}(\lambda) = a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(na) e^{-2i\pi na\lambda}. \tag{1}$$

Supposons que le signal est observé sur l'intervalle de temps $[-Na, (N-1)a]$, le spectre approché correspondant aux observations $x_n = f(na), n = -N, \cdots, N-1$ est alors:

$$S_N(\lambda) = a \sum_{n=-N}^{N-1} x_n e^{-2i\pi na\lambda}$$

et ces valeurs pour $\lambda_k = \frac{k}{2Na} = \frac{k}{T}$, i.e.:

$$S_N\left(\frac{k}{T}\right) = a \sum_{n=-N}^{N-1} x_n \omega_{2N}^{-nk}, \tag{2}$$

se calculent aisément à l'aide de la TFD.
Considérons la suite $f(na)$ où $f(x) = e^{2i\pi F_0 x}$, échantillonnée à la période $a = \frac{1}{F_e}$

1. A quelle condition sur a , (1) est-elle valide ?

2. On suppose $N = 16$. Calculer $S_N(\lambda)$ en fonction de F_0.

3. Expliquez pourquoi la formule (2) peut être calculée à l'aide de la TFD.

4. Application: on pose $a = 1/32$, et on suppose toujours $N = 16$. Dans la formule (2) que vaut T. Calculer sous matlab $S_N(\frac{k}{T})$ lorsque $F_0 = 7$, et lorsque $F_0 = 6.4$, à l'aide de la TFD (commande fft de Matlab). Faire une représentation graphique du module $S_N(\frac{k}{T})$ (attention à ce qu'en abscisse on ait des fréquences et des amplitudes en ordonnées). Interprétez les résultats.

Exercice 2 *Transformée de Fourier à court terme*
Comme l'analyse en fréquence est une opération qui effectue une moyenne sur tout l'axe des temps, la localisation temporelle de l'information fréquentielle est perdue.

1. Considérer le signal composé d'une sinusoïde de fréquence $f_1 = 0.1$ Hz pendant une durée $T_1 = 128$s puis d'une sinusoïde de fréquence $f_2 = 0.2$ Hz pendant une durée $T_2 = 64$s, le signal f ainsi obtenu a donc durée totale $T = T_1 + T_2$

- Si le signal f est échantillonné avec une période d'échantillonnage d'une seconde montrer que la transformée de Fourier de la distribution associée aux échantillons de f s'écrit:

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{n=0}^{T} f(n) e^{-2i\pi n\omega}. \tag{3}$$

- Si on complète le signal formé par les échantillons de f par des zéros pour obtenir une séquence de taille 256 et que l'on calcule la TFD de ce signal, à quelles fréquences correspond cette TFD? Même question si on calcule la TFD du signal formé par les échantillons de f complété par des zéros pour obtenir un signal de taille 512. Comment le nombre de zéros que l'on rajoute dans f influe sur la résolution fréquentielle dans la TFD? Tracez dans les deux cas le module de la TFD.

2. Dans cette question on considère la fenêtre rectangulaire définie par:

$$g(k) = \frac{1}{2M} \text{ si } -M \leq k \leq M-1 \tag{4}$$

On appelle transformée de Fourier à court terme discrétisée en temps la fonction de deux variables:

$$F(n,\omega) = \sum_{k=-M}^{M-1} f(n-k)g(k)e^{-2i\pi k\omega}. \tag{5}$$

- Expliquer en quoi la terminologie "court terme" est appropriée.
- En faisant un changement d'indice comme dans l'exercice 1, montrer que l'on peut évaluer la transformée de Fourier à court terme discrétisée en temps à la fréquence $\omega = \frac{m}{2M}$ et au temps n à l'aide d'une TFD.
- Lorsque n varie dans $\{0, \cdots, T\}$, montrer que l'on peut écrire les TFDs des différentes convolutions sous la forme d'une matrice de taille $(T+1) \times 2M$.
- Applications numériques: considérer $M = 15$, et tracer le graphe correspondant au module de la fonction $F(n, \frac{m}{2M})_{0 \leq n \leq T, 0 \leq m \leq 2M-1}$ décrite à la question précédente (étudier les commandes surf ou mesh). On prendra bien soin à ce que les abscisses et les ordonnées aient une signification physique, i.e. en abscisse le temps en secondes, et en ordonnée les fréquences en Hertz. Refaire le calcul avec $M = 8$ puis $M = 30$. Interprêter le résultat obtenu.

3. La fenêtre rectangulaire g choisie dans les questions précédentes peut-être remplacée par une fenêtre plus régulière, comme par exemple une Gaussienne, associée aux échantillons suivants:

$$g(k) = e^{-\pi \frac{k^2}{\sigma^2 T^2}} \text{ si } -M \leq k \leq M-1, \tag{6}$$

où T correspond toujours à la longueur du signal.

- Si $M = 15$ trouver la valeur de σ telle que $g(k) \leq 10^{-3}$ pour $-M \leq k \leq M-1$, on obtient ainsi une première fenêtre g_1. Faire le même calcul avec $M = 30$, et $M = 60$, on obtient ainsi les fenêtres g_2 et g_3.
- Remplacer dans (5) g par g_1, puis g_2 et g_3 et tracer les graphes correspondant au module de $F(n, \frac{m}{2M})_{0 \leq n \leq T, 0 \leq m \leq 2M-1}$ dans chacun des cas. Analyser les résultats obtenus avec les différentes fenêtres.