Td 8: Théorème d'échantillonnage, transformée en Z

Exercice 1 Soit f une fonction réelle telle que $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Supp}(\hat{f}(\xi)) = [f_1, f_2]$ pour $\xi > 0$. On suppose de plus que $2f_1 \geq f_2$.

1. Quelle relation lie $\hat{f}(\xi)$ et $\hat{f}(-\xi)$?

2. Que doit a priori vérifier la fréquence d'échantillonnage pour que le théorème de Shannon s'applique?

3. Expliquer alors comment périodiser le signal fréquentiel en utilisant la fréquence d'échantillonnage la plus petite possible.

4. En déduire alors une méthode de reconstruction du signal.

Exercice 2 Calculer les transformées en z en précisant bien les domaines de covergence des signaux suivants:

1. $x_n = \delta_{n-n_0}$
2. $x_n = \alpha^n u_n$ avec $u_n = 1$ si $n \geq 0$ et 0 sinon.
3. $x_n = -\alpha^n u_{-n-1}$

Exercice 3 Calculer la réponse impulsionnelle du filtre donné par la transformée en z suivante:

$$H(z) \quad = \quad \frac{1-z^{-1}}{1-5z^{-1}+6z^{-2}}$$

le filtre est-il causal? Est-il stable?

Exercice 4 On échantillonne le filtre RC, $RCv' + v = f$ sous la forme $RC\frac{y_n - y_{n-1}}{a} + y_n = x_n$.
1. Ecrire le filtre sous la forme d'une équation aux différences linéaires à coefficients constants.
2. En déduire la fonction de transfert du filtre
3. Calculez la réponse impulsionnelle du filtre. Vérifiez que le filtre est causal et stable.