Grenoble-INP **AFCD**
ENSIMAG
2ème année

Td 5 : Distributions

Exercice 1 *Valeur principale de* $\frac{1}{x}$
Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on définit :

$$\langle Vp(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right)$$

Montrer que $Vp(\frac{1}{x})$ est une distribution sur $\mathbb{R}$. Montrer que $xVp(\frac{1}{x}) = 1$.

Exercice 2 Calculer dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ les dérivées des distributions suivantes :

1. $T = arctan(\frac{1}{x})$.
2. $T = ae^{-a|x|}$ avec $(a > 0)$. Calculer $-T'' + a^2 T$.
3. $T = ln|x|$.

Exercice 3 Soit T une distribution sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\frac{d}{dx} T = 0 \;\; dans \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \Longrightarrow T = Cte$$

Exercice 4 Soit Ω le disque unité de $\mathbb{R}^2$ et $\Gamma = \partial\Omega$ sa frontière, le cercle de centre 0 et de rayon 1. On considère le problème :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(x,y) = \varphi(x,y) \quad sur \quad \Gamma \end{cases}$$

Montrer que ce problème admet une solution $u \in L^2(\Omega)$ telle que $\nabla u \in L^2(\Omega)$.
Indications : Ecrire le problème en coordonnées polaires. Chercher une solution $u(\rho, \theta)$ telle que sur le cercle $u(1, \theta) = \varphi(\theta)$. Comme la fonction $\theta \to u(\rho, \theta)$ doit être 2π-périodique en θ, décomposez-la en série de Fourier de θ et calculez ses coefficients de Fourier par l'équation (*).