Grenoble-INP **AFCD**
ENSIMAG
2ème année

TD8 : Bases Hilbertienne

Exercice 1 On introduit l'espace

$$H = \left\{ f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \ ; \ f \in L^2([-\pi,\pi]) \ et \ f \ impaire \right\}$$

1. Montrer (rapidement) que H, muni du produit scalaire :

$$\langle f/g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

est un espace de Hilbert.

2. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx)_{n \geq 1}$ est une base Hilbertienne de H.

3. Soit f la fonction dÈfinie sur $[-\pi, \pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(\pi + x) & si \quad x < 0 \\ \frac{1}{2}(\pi - x) & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Calculer les coefficients c_n de f sur la base $\mathcal{B}$: $f = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$.

4. Que peut-on dire de la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$ au sens :

a) de la convergence ponctuelle,
b) de la convergence normale,
c) de la convergence dans l'espace H ?

Exercice 2 *Base de Haar*

On se place dans l'espace $L^2([0,1])$ muni du produit scalaire usuel. Soit φ la fonction caractéristique de l'intervalle $[0,1]$ et ψ la fonction définie par :

$$\psi(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x-1) \tag{1}$$

1. Tracer la courbe de ψ et vérifier que les fonctions φ et ψ sont orthogonales.

On pose, pour $j \geq 0$ et $0 \leq k \leq 2^j - 1$:

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k) \tag{2}$$

2. Montrer que la famille $(\varphi, \psi_{j,k})$ est une base Hilbertienne de $L^2([0,1])$.

3. Montrer que le support de la fonction $\psi_{j,k}$ est l'intervalle $I_{j,k} = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$. En dÈduire que si f est constante sur l'intervalle $[a,b] \subset [0,1]$, alors $\langle f/\psi_{j,k} \rangle = 0$ si $I_{j,k} \subset [a,b]$. Interprétation?

4. Ecrire un algorithme de décomposition d'une fonction f sur la base de dim finie $(\varphi, \psi_{j,k})_{0 \leq j \leq J}$.

Exercice 3 *Polynômes de Legendre*

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1,1]$, on définit :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2-1)^n \right) \tag{3}$$

1. Montrer que P_n est un polynôme de degré n.

2. Montrer que la famille (P_n) est orthogonale dans $L^2([-1,1])$ muni du produit scalaire usuel.

3. Montrer que

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)^2 dx = \frac{2}{2n+1} \tag{4}$$

4. En déduire que la famille $(\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n)$ est une base Hilbertienne de $L^2([-1,1])$.
5. Montrer que les P_n vérifient la relation de récurrence :

$$\left\{\begin{array}{l} P_0 = 1 \;;\; P_1 = x \\ P_n = \frac{2n-1}{n}xP_{n-1} - \frac{n-1}{n}P_{n-2} \quad n \geq 2 \end{array}\right.$$

6. Montrer que les P_n sont solutions de l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

Exercice 4 *Polynômes de Chebyshev*
On définit, pour f et g dans l'espace $L^2(]-1,1[)$:

$$\langle f/g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{5}$$

1. Montrer que l'application $(f,g) \rightarrow \langle f/g \rangle$ est un produit scalaire sur $L^2(]-1,1[)$.

On définit la suite pour $n \geq 0$:

$$T_n(x) = \cos(narccosx) \tag{6}$$

2. Montrer que la famille $(\sqrt{\frac{1}{\pi}}T_0, \sqrt{\frac{2}{\pi}}T_n)$ est une base Hilbertienne de $L^2(]-1,1[)$.
3. Montrer que les T_n vérifient la relation de récurrence :

$$\left\{\begin{array}{l} T_0 = 1 \;;\; T_1 = x \\ T_n = 2xT_{n-1} - T_{n-2} \quad n \geq 2 \end{array}\right.$$

4. Montrer que $T_n(1) = 1$, $T_n(-1) = (-1)^n$, $T_{2n}(0) = (-1)^n$, $T_{2n+1}(0) = 0$.
5. Montrer que les T_n sont solutions de l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$$