Grenoble-INP **AFCD**
ENSIMAG
2ème année

TD7 : espaces de Hilbert

Exercice 1 Soit H un espace de Hilbert. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ vérifiant la propriété suivante :

$$\exists M > 0 \text{ tel que } \|Tx\| \geq M\|x\| \quad \forall x \in H$$

1. Montrer que T est injectif
2. On note $Im(T) = \{y \in H; \exists \quad x \in H \text{ tel que } Tx = y\}$. Montrer que $Im(T)$ est complet dans H.
3. Montrer que pour tout $z \in H$, il existe $b \in Im(T)$ unique tel que
$$\|z - b\| = \inf_{y \in Im(T)} \|z - y\|$$
4. On suppose que T est autoadjoint, c'est-à-dire vérifie la propriété suivante :
$$< Tx, y >=< x, Ty > \quad \forall x, y \in H$$
Montrer que T est bijectif.
5. Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, autoadjoint, vérifiant la propriété suivante :
$$\exists C > 0 \text{ tel que } \inf_{\|x\|=1} | < Ax, x > | = C$$
Montrer que A est bijectif.

Exercice 2 Définir la projection orthogonale sur un sous espace affine fermé.

Exercice 3 On pose

$$l_2(\mathbb{C}) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}}; \sum_{n \geq 0} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

1. Montrer que $l_2(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel

2. Pour $x = (x_n) \in l_2(\mathbb{C})$, on pose $\|x\| = \left(\sum_{n \geq 0} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Montrer que $\|.\|$ est une norme et que $l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$ est complet pour cette norme. En déduire que $l_2(\mathbb{C})$ est un espace de Hilbert pour un produit scalaire que l'on précisera.

Exercice 4 Soit $l_2(\mathbb{R}) = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 < +\infty\}$ qui muni du produit scalaire $\langle x, y \rangle = \sum_n x_n y_n$ est un espace de Hilbert.
On définit

$$F = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \exists p \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq p, \quad x_n = 0\}$$

1. Montrer que F n'est pas fermé
2. Montrer que F est dense dans $l_2(\mathbb{R})$
3. Montrer qu'il existe x appartenant à $l_2(\mathbb{R})$ tel que:

$$\forall y \in F \quad \forall z \in F^{\perp} \quad x \neq y + z$$