Grenoble-INP
ENSIMAG
2ème année **AFCD**

TD6 : espaces de Hilbert

Exercice 1 H préhilbertien

1. $A \subset H$ tel que $A \neq \emptyset$, alors $A^{\perp}$ est fermé
2. $A \subset B$ tel que $A \neq \emptyset$, alors $B^{\perp} \subset A^{\perp}$
3. $A \subset (A^{\perp})^{\perp} \quad \forall A \subset H$
4. $\overline{A}^{\perp} = A^{\perp}$
5. si A est un s.e.v de H et H complet alors $\overline{A} = (A^{\perp})^{\perp}$

Exercice 2 Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$. On note $< ., . >$ le produit scalaire sur H et $\|.\|$ la norme associée. Etant donnés $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$, m réels strictement positifs on note H_i l'espace H muni du produit scalaire

$$< x, y >_i = \alpha_i < x, y >$$

et $\mathcal{H} = H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_m$ l'espace produit. Pour $X = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$ et $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$ dans $\mathcal{H}$, on pose

$$<< X, Y >> = \sum_{i=1}^{m} < x_i, y_i >_i$$

1. Montrer que l'application $(X, Y) \to << X, Y >>$ est un produit scalaire sur $\mathcal{H}$. Vérifier que $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert pour ce produit scalaire.

2. Soit $\mathcal{A}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$ défini par :

$$\mathcal{A} = \{X = (x_1, x_2, \cdots, x_m) | x_1 = x_2 = \cdots = x_m\}$$

   - Montrer que $\mathcal{A}$ est fermé dans $\mathcal{H}$
   - Soit $\mathcal{A}^{\perp}$ l'orthogonal de A dans $\mathcal{H}$. Montrer que :
   $$\mathcal{A}^{\perp} = \left\{ Y = (y_1, y_2, \cdots, y_m) | \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i = 0 \right\}$$
   - Soit $S \in \mathcal{H}$. Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{A}$ et $Y \in \mathcal{A}^{\perp}$ uniques tels que $S = X + Y$.

3. Calculer X et Y.