Grenoble-INP **AFCD**
ENSIMAG
2ème année

Examen Décembre 2021, durée 3 heures

Exercice 1 Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soit $E = L^2(]a, b[, \mathbb{C})$

1. Rappeler quel produit scalaire fait de E un espace de Hilbert.

2. On définit l'espace de Sobolev :

$$H^1(]a,b[) = \left\{ u \in E, \exists w \in E, \forall \phi \in \mathcal{D}(]a,b[), \int u(x)\phi'(x)dx = -\int w(x)\phi(x)dx \right\}.$$

3. Montrer que $F = H^1(]a,b[)$ est un sous espace-vectoriel de E et qu'il contient l'ensemble des fonctions de classe $C^1([a,b])$.

4. Montrer que si $u \in F$ alors la fonction w correspondante est unique. Dans la suite, pour $u \in F$, on notera $w = u'$ par analogie avec le cas des fonctions C^1.

5. Soit $I =]-1,1[$ et u définie sur I par $u(x) = (x+1)\chi_{]-1,0]}(x) + (1-x)\chi_{]0,1[}(x)$. Montrer que $u \in H^1(I)$ et calculer u'.

6. Montrer que la fonction $h(x) = \chi_{]-1,0]}(x) - \chi_{]0,1[}(x)$ n'appartient pas à $H^1(I)$.

7. On définit sur F la forme sesquilinéaire suivante :

$$\langle u, v\rangle_F = \langle u, v\rangle_E + \langle u', v'\rangle_E.$$

Montrer que $\langle ., .\rangle_F$ est un produit scalaire sur F.

8. Montrer que $(F, \langle ., .\rangle_F)$ est un espace de Hilbert.

9. Muni de la norme $\|.\|_{L^2}$, F est-il fermé ?

Exercice 2 *Partie finie de* $\frac{1}{x^2}$

Soit $F(x) = ln(|x|)$. Soit $Pf(\frac{1}{x^2})$ la distribution définie par $Pf(\frac{1}{x^2}) = -F''$ (la dérivée étant la dérivée distribution)

1. On rappelle que $vp(\frac{1}{x}) = F'$, en déduire

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad < Pf(\frac{1}{x^2}), \phi >= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\phi'(x) - \phi'(-x)}{x} dx$$

2. A l'aide d'une intégration par parties montrer que :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad < Pf(\frac{1}{x^2}), \phi >= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\phi(x) + \phi(-x) - 2\phi(0)}{x^2} dx$$

3. Montrer alors $x^2 Pf(\frac{1}{x^2}) = 1$

4. Soit g une application $C^\infty(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, Montrer que dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ on a :

$$(gT)' = g'T + gT'$$

5. On rappelle que $xvp(\frac{1}{x}) = 1$. Montrer alors d'une nouvelle façon que $x^2 Pf(\frac{1}{x^2}) = 1$.

Exercice 3 Soit T une distribution sur Ω (ouvert de $\mathbb{R}^n$). On suppose qu'il existe $c > 0$ tel que pour toute fonction φ de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ on ait

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq c \left(\int_{\Omega} |\varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

Montrer que T est définie par une fonction f de $L^2(\Omega)$.

Exercice 4 Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ la solution de l'équation différentielle $f''+af'+bf = 0$ qui vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. On rappelle que H est la fonction de Heaviside, calculer en considérant la dérivée au sens des distributions de:

$$(Hf)'' + a(Hf)' + b(Hf)$$

Exercice 5 Après avoir expliqué pourquoi ce sont des distributions de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, calculer les transformées de Fourier des distributions suivantes.

1. $T_{|x|}$
2. T_{xH}

Exercice 6 Trouver un exemple de suite de distributions T_n de $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ qui converge dans $\mathcal{D}'$ mais dont la limite T n'est pas à support compact.