

Vecteurs et suites aléatoires

B. Ycart

Ce cahier vient compléter le cours de “modèles probabilistes” dans la même collection. Il en suppose acquises les principales notions, en particulier la définition d’une probabilité, les calculs de probabilités conditionnelles et la notion de loi de probabilité d’une variable aléatoire réelle. L’objectif ici est double. Il s’agit d’acquérir d’une part une compréhension intuitive et expérimentale des distributions de probabilité dans l’espace, d’autre part un bagage minimal sur les différentes notions probabilistes de convergence et leurs utilisations pratiques. Les notions sur les lois multidimensionnelles seront d’abord présentées en dimension 2, où la visualisation est la plus facile. Le passage à la dimension supérieure sera surtout l’occasion de présenter les vecteurs gaussiens, qui sont un des outils de base de la statistique, comme le sont la loi des grands nombres et le théorème central limite, dans le chapitre sur les convergences. Il existe de très nombreuses références sur la théorie des probabilités. Les trois ouvrages suivants adoptent un point de vue plus pratique que d’autres.

N. BOULEAU : Probabilités de l’ingénieur, variables aléatoires et simulation.
Hermann, Paris, 1986.

D. FOATA et A. FUCHS : Calcul des probabilités.
Masson, Paris, 1996.

M. DENKER, W.A. WOYCZYNSKI : Introductory statistics and random phenomena.
Birkhäuser, Boston, 1998.

Ce “cahier de mathématiques appliquées” doit beaucoup aux relectures scrupuleuses de Rachid Boumaza, au dynamisme de Sylvie Sevestre-Ghalila, au soutien de l’Ecole Supérieure de la Statistique et de l’Analyse de l’Information de Tunisie, par son directeur Makki Ksouri et son directeur des études Nacef Elloumi, ainsi qu’à la compétence de Habib Bouchriha, directeur du Centre des Publications Universitaires de la Tunisie.

Table des matières

1	Couples de variables aléatoires	3
1.1	Densités	3
1.2	Changements de variables	6
1.3	Somme de deux variables aléatoires	9
1.4	Simulation de la loi normale	10
1.5	Espérances et covariances	12
1.6	Lois conditionnelles	14
1.7	Espérances conditionnelles	18
2	Vecteurs Aléatoires	21
2.1	Densités et espérances	21
2.2	Vecteurs aléatoires gaussiens	24
2.3	Conditionnement et vecteurs gaussiens	28
2.4	Lois du khi-deux, de Fisher et de Student	30
2.5	Echantillons gaussiens	33
3	Convergences	35
3.1	Convergence en loi	35
3.2	Théorème central limite	39
3.3	Convergence presque sûre	41
3.4	Convergence en probabilité	46
3.5	Convergence dans L_p	49
3.6	Hiérarchie des convergences	50
4	Exercices	52

Index

- algorithme de Box-Muller, 11
- approximation normale, 41

- Bienaymé-Chebyshev, 44
- Borel, 44
- Borel-Cantelli, 42
- borélien, 3
- Box-Muller, 11

- changement de variable, 7, 22
- coefficient de corrélation, 13
- convergence
 - dans L_p , 49, 51
 - dominée, 49
 - en loi, 36, 48, 51
 - en moyenne quadratique, 49
 - en probabilité, 46, 51
 - faible, 36
 - presque sûre, 42, 47, 51
 - simple, 35
- couple de variables aléatoires, 3
- covariance, 12

- décorrélé, 26
- densité, 6, 21
 - conditionnelle, 15
 - d'un couple, 3, 4
 - d'une loi normale, 26
 - d'une somme, 9
 - marginale, 4

- échantillon, 33
 - gaussien, 33
- erreur quadratique, 20
- espérance, 12, 22
 - conditionnelle, 19, 29
 - d'un vecteur aléatoire, 23
- espérance conditionnelle, 18

- Fisher, 31, 32
- fonction
 - caractéristique, 22, 25, 37
 - caractéristique d'une loi normale, 23
 - de répartition, 32, 36
 - quantile, 32
- Fourier, 22
- fréquence expérimentale, 44

- Gauss, 39
- générateur pseudo-aléatoire, 36

- indépendance, 4, 13, 21, 23, 26
- inégalité
 - de Bienaymé-Chebyshev, 44
 - de Cauchy-Schwarz, 13
 - de Hölder, 49
 - de Markov, 44, 49

- jacobien, 7, 22

- Kolmogorov, 45

- Laplace, 39
- lemme de Borel-Cantelli, 42
- loi
 - binomiale, 37, 38, 41, 45
 - conditionnelle, 14, 29
 - de Bernoulli, 44
 - de Cauchy, 51
 - de Fisher, 31, 32
 - de Poisson, 38, 41
 - de probabilité, 3
 - de Student, 32, 33
 - des grands nombres, 51
 - du khi-deux, 30, 34, 41
 - faible des grands nombres, 46
 - forte des grands nombres, 45
 - gamma, 30, 41
 - hypergéométrique, 37
 - normale, 10, 24, 33
 - normale multidimensionnelle, 26
 - uniforme, 6, 14, 16, 18

Markov, 44
matrice de covariance, 24
méthode polaire, 10
moyenne conditionnelle, 18
moyenne empirique, 33

Paul Lévy, 37
prédiction, 20
 affine, 30
produit de convolution, 10
produit scalaire, 20
projection orthogonale, 20

Random, 36

Student, 32
support, 4, 6, 22

théorème
 central limite, 39
 de Paul Lévy, 37
transformée de Fourier, 22

variable aléatoire, 3
variance empirique, 33
vecteur
 aléatoire, 21
 gaussien, 24, 28