**Université René Descartes – Paris 5**

**UFR de Mathématiques et Informatique**

Mathématiques et Calcul : partiel 3, 19 avril 2005

L1 : Licence sciences et technologies,
mention mathématiques, informatique et applications

*Nombre de pages de l'énoncé : 4. Durée 1 heure 15.*

*NB : L'examen se compose de 10 questions indépendantes. Pour chaque question 5 affirmations sont proposées, parmi lesquelles 2 sont vraies et 3 sont fausses. Pour chaque question, indiquez sur votre copie les lettres des 2 affirmations que vous pensez vraies. Chaque question pour laquelle les 2 affirmations vraies sont données rapporte 2 points.*

**Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.**

---

## SUJET 1

### Question 1

**A :** (FAUX) Si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum u_n^2$ converge.

**B :** (VRAI) Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors la série $\sum u_n^2$ converge.

**C :** (FAUX) Si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum n\, u_n$ converge.

**D :** (VRAI) Si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum u_n/n$ converge.

**E :** (FAUX) Si la suite $(u_n)$ tend vers 0 alors la série $\sum u_n$ converge.

### Question 2

**A :** (FAUX) La série $\sum \frac{n^2+1}{\ln(n)\sqrt{n^4+2}}$ converge.

**B :** (FAUX) La série $\sum \frac{n+1}{\ln(n)\sqrt{n^4+2}}$ converge.

**C :** (VRAI) La série $\sum \frac{n^2+1}{\ln(n)\sqrt{n^8+2}}$ converge.

**D :** (VRAI) La série $\sum \frac{n^2+1}{(\ln(n))^2\sqrt{n^6+2}}$ converge.

**E :** (FAUX) La série $\sum \frac{n^2+1}{\ln(n)\sqrt{n^3+2}}$ converge.

**Question 3**

**A :** (FAUX) Si $|r| \leq 1$ alors $\sum n\, r^n$ converge.

**B :** (VRAI) Si $|r| < 1$ alors $\sum n\, r^n$ converge.

**C :** (FAUX) Si $|r| < 1$ alors $\sum e^n\, r^n$ converge.

**D :** (VRAI) Si $|r| \leq 1$ alors $\sum (r/2)^n$ converge.

**E :** (FAUX) Si $|r| \leq 1$ alors $\sum (2r)^n$ converge.

**Question 4**

**A :** (VRAI) La série $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ converge.

**B :** (FAUX) La série $\sum \frac{2}{n+1}$ converge.

**C :** (FAUX) La série $\sum \frac{n!}{2^n}$ converge.

**D :** (FAUX) La série $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ converge.

**E :** (VRAI) La série $\sum \frac{2^n}{n!}$ converge.

**Question 5**

**A :** (FAUX) La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est absolument convergente.

**B :** (VRAI) La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

**C :** (FAUX) La série $\sum \frac{1+(-1)^n}{n}$ converge.

**D :** (VRAI) La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente.

**E :** (FAUX) La série $\sum \frac{(-1)^n}{n\ln(n)}$ est absolument convergente.

**Question 6**

**A :** (FAUX) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1$

**B :** (VRAI) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$

**C :** (FAUX) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1$

**D :** (FAUX) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 1$

**E :** (VRAI) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$

**Question 7** Dans cette question on suppose que les $a_n$ sont strictement positifs.

**A :** (FAUX) Si $R$ est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n\, z^n$, alors la série $\sum a_n\, R^n$ est convergente.

**B :** (FAUX) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n\, z^n$ est 2.

**C :** (VRAI) Si $R$ est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n\, z^n$, alors pour tout $z$ tel que $|z| < R$, la série $\sum a_n\, z^n$ est absolument convergente.

**D :** (FAUX) Si $\sum a_n$ converge alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n\, z^n$ est égal à 1.

**E :** (VRAI) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n\, z^n$ est $\frac{1}{2}$.

**Question 8**

**A :** (FAUX) Le rayon de convergence de la série entière $\sum (2^n + 3^n)\, z^n$ est $\frac{1}{2}$.

**B :** (VRAI) Le rayon de convergence de la série entière $\sum (2^n + 3^n)\, z^n$ est $\frac{1}{3}$.

**C :** (VRAI) Le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{2^n + 3^n}{5^n}\, z^n$ est $\frac{5}{3}$.

**D :** (FAUX) Le rayon de convergence de la série entière $\sum n^n\, z^n$ est strictement positif.

**E :** (FAUX) Le rayon de convergence de la série entière $\sum z^n$ est $+\infty$.

**Question 9**

**A :** (VRAI) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} z^n = (z-1)\exp(z) + 1$

**B :** (FAUX) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} z^n = (z-1)\exp(z) - z$

**C :** (FAUX) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} z^n = (z^2+z)\exp(z) - 1$

**D :** (VRAI) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} z^n = (z^2+z)\exp(z)$

**E :** (FAUX) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} z^n = \exp(z) - 1$

**Question 10** Dans cette question on suppose que $z$ est tel que les séries écrites convergent.

**A :** (VRAI) $\frac{1}{1-2z} = 1 + 2z + 4z^2 + \cdots + 2^n z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n z^n$

**B :** (FAUX) $\frac{1}{2-z} = 2 + 2z + 2z^2 + \cdots + 2z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} 2 z^n$

**C :** (FAUX) $\frac{1}{2-z} = 1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}z^2 + \cdots + \frac{1}{2^n}z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} z^n$

**D :** (VRAI) $\frac{2}{2-z} = 1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}z^2 + \cdots + \frac{1}{2^n}z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} z^n$

**E :** (FAUX) $\frac{2}{2-z^2} = 1 + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{2^4}z^4 + \cdots + \frac{1}{2^{2n}}z^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} z^{2n}$