

Mathématiques et Calcul : partiel 2, 29 mars 2005

L1 : Licence sciences et technologies,
mention mathématiques, informatique et applications

Nombre de pages de l'énoncé : 4. Durée 1 heure.

NB : L'examen se compose de 10 questions indépendantes. Pour chaque question 5 affirmations sont proposées, parmi lesquelles 2 sont vraies et 3 sont fausses. Pour chaque question, indiquez sur votre copie les lettres des 2 affirmations que vous pensez vraies. Chaque question pour laquelle les 2 affirmations vraies sont données rapporte 2 points.

Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.

SUJET 1

Question 1

- A** : FAUX. Il existe des primitives de $\sin(\frac{1}{x})$ définies sur l'intervalle $[-1, 1]$.
- B** : VRAI. Il existe des primitives de $\sin(\sqrt{|x|})$ définies sur l'intervalle $[-1, 1]$.
- C** : FAUX. Il existe des primitives de $\frac{1}{\sin(x)}$ définies sur l'intervalle $[-1, 1]$.
- D** : VRAI. L'intégrale de $x \sin^2(x)$ sur $[-\pi, \pi]$ est nulle.
- E** : FAUX. L'intégrale de $x \sin(x)$ sur $[-\pi, \pi]$ est nulle.

Question 2 On définit la fonction f qui à $t \in \mathbb{R}$, associe $f(t) = e^{-t} \arctan(t)$.

- A** : FAUX. L'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ diverge.
- B** : VRAI. La fonction f admet une primitive définie sur \mathbb{R} .
- C** : FAUX. La fonction $t \mapsto e^{-t}/(1+t^2)$ est une primitive de f .
- D** : VRAI. L'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ est majorée par $\pi/2$.
- E** : FAUX. Une intégration par parties donne $\int_0^1 f(t) dt = [f(t)]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+t^2} dt$.

Question 3 On définit la fonction f qui à $t \in]0, \pi[$, associe $f(t) = \frac{\cos(t)}{\sqrt{\sin(t)}}$.

A : VRAI. L'intégrale de f sur $]0, \pi[$ converge.

B : FAUX. Pour tout $x \in]0, \pi[$, $\int_0^x f(t) dt = \int_{\pi-x}^{\pi} f(u) du$.

C : FAUX. La fonction $t \mapsto \sqrt{\sin(t)}$ est une primitive de $f(t)$ sur $]0, \pi[$.

D : FAUX. L'intégrale de f sur $]0, \pi/2]$ diverge.

E : VRAI. L'intégrale de f sur $[\pi/4, \pi/2]$ est strictement positive.

Question 4 On définit la fonction f qui à $t \in \mathbb{R}$, associe $f(t) = \frac{1}{(t^2 + 4)^2}$. On pose

$$I = \int_0^2 f(t) dt.$$

A : FAUX. $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+u^2)^2} du$.

B : VRAI. $I = \frac{1}{8} \left(\int_0^2 \frac{1}{t^2+4} dt + \left[\frac{t}{t^2+4} \right]_0^2 \right)$.

C : FAUX. $I > \frac{2}{4^2}$.

D : VRAI. L'intégrale de f sur \mathbb{R} converge.

E : FAUX. L'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ diverge.

Question 5 On définit la fonction f qui à $t \in \mathbb{R}$, associe $f(t) = \frac{t}{t^2+1}$.

A : FAUX. $\int_0^2 f(t) dt = \ln(5)$.

B : FAUX. $\int_0^2 f(t) dt > \int_0^2 t dt$.

C : VRAI. Soit g une fonction définie et continue sur $[0, 2]$ telle que $\int_0^2 |g(t)|f(t) dt = 0$. Alors pour tout $t \in [0, 2]$, $g(t) = 0$.

D : FAUX. $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2}$ est une somme de Riemann associée à f sur l'intervalle $[0, 2]$.

E : VRAI. $\sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2+k^2}$ tend vers $\int_0^2 f(t) dt$ quand n tend vers l'infini.

Question 6 On définit la fonction f qui à $t \in \mathbb{R}$, associe $f(t) = \frac{t^2 + 1}{(t + 3)(t^2 - 4)}$.

A : VRAI. La décomposition en éléments simples de f a la forme suivante:

$$f(t) = \frac{A}{t+3} + \frac{B}{t+2} + \frac{C}{t-2}.$$

B : FAUX. Une primitive de $f(t)$ est $\ln(|(t+3)(t+2)^5(2-t)|)$.

C : FAUX. f a une primitive définie sur \mathbb{R} .

D : VRAI. $\int_0^1 f(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \cos^2(u)) \sin(u)}{(3 + \cos(u))(\cos^2(u) - 4)} du.$

E : FAUX. $\int_0^1 f(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-3u} + e^{-u}}{(e^{-u} + 3)(4 - e^{-2u})} du.$

Question 7 On définit la fonction f qui à $t \in \mathbb{R}$, associe $f(t) = |t|$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose $g(x) = \int_{-x}^x f(t) dt$.

A : FAUX. La fonction g est deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

B : FAUX. La fonction g n'est pas dérivable sur \mathbb{R} .

C : VRAI. $g(x) = 2 \int_0^x f(t) dt.$

D : VRAI. $g(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

E : FAUX. Si F est une primitive de f , alors $g(x) = 2F(x)$.

Question 8 On définit la fonction f qui à $t \in [1, 2]$, associe $f(t) = \sqrt{(t-1)(2-t)}$.

On pose: $I = \int_1^2 f(t) dt.$

A : FAUX. Le changement de variable $t \mapsto u = (t-1)(2-t)$ est bijectif sur $[1, 2]$.

B : VRAI. Le changement de variable $t \mapsto u = 3-t$ donne $\int_1^2 t f(t) dt = 3I - \int_1^2 t f(t) dt.$

C : FAUX. Le changement de variable $t \mapsto v = 2t - 3$ donne $I = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-v^2} dv.$

D : FAUX. f admet une primitive définie sur \mathbb{R} .

E : VRAI. $I \leq \sup_{x \in [1,2]} f(x).$

Question 9 On définit la fonction f qui à $t \in \mathbb{R}$, associe $f(t) = t^2 e^{-t^2/2}$.

A : FAUX. f n'admet pas de primitive définie sur \mathbb{R} .

B : FAUX. L'intégrale de f sur \mathbb{R} diverge.

C : FAUX. Le changement de variable $t \mapsto u = t^2/2$ donne $\int_0^x f(t) dt = \int_0^{\sqrt{2x}} e^{-u} du$.

D : VRAI. Une intégration par parties donne $\int_0^x f(t) dt = -x e^{-x^2/2} + \int_0^x e^{-t^2/2} dt$.

E : VRAI. $\int_0^x \frac{f(t)}{t} dt = 1 - e^{-x^2/2}$.

Question 10

A : VRAI. $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge.

B : FAUX. $\int_3^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{\ln(t)}} dt$ converge.

C : VRAI. $\int_0^{+\infty} \sqrt{t^2 + 2t} \sin\left(\frac{2}{(t+1)^2}\right) dt$ diverge.

D : FAUX. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ diverge.

E : FAUX. $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^3 \ln(t) \sin(t) dt$ diverge.