

QCM 1Partiel 1 : 1^{er} Mars 2005

NB : L'examen se compose de 10 questions indépendantes. Pour chaque question 5 affirmations sont proposées, parmi lesquelles 2 sont vraies et 3 sont fausses. Pour chaque question, indiquez sur votre copie les lettres des 2 affirmations que vous pensez vraies. Chaque question pour laquelle les 2 affirmations vraies sont données rapporte 2 points.

Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.

Question 1 Question de cours.

A : FAUX Les valeurs propres du produit de deux matrices sont les produits des valeurs propres des deux matrices.

B : VRAI Si un vecteur est vecteur propre de deux matrices, alors il est un vecteur propre de leur somme.

C : FAUX Si une matrice a toutes ses valeurs propres réelles, alors elle est diagonalisable.

D : FAUX Toute matrice admet au moins deux valeurs propres.

E : VRAI Le produit des valeurs propres d'une matrice est égal à son déterminant.

Question 2 Question de cours.

A : VRAI Deux vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes forment une famille libre.

B : FAUX Si $AX = \lambda X$ alors X est vecteur propre de A .

C : VRAI A et tA ont même polynôme caractéristique.

D : FAUX A et tA ont mêmes sous-espaces propres.

E : FAUX Si $AB = BA$ alors A et B ont mêmes valeurs propres.

Question 3 Soit A une matrice. On suppose que son polynôme caractéristique est $P_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(2 - \lambda)$.

A : VRAI A est nécessairement de taille 3×3 .

B : FAUX A est diagonalisable car P_A est scindé.

C : VRAI Les seules valeurs propres de A sont 1 et 2.

D : FAUX La dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est égale à 2.

E : FAUX A est diagonalisable car elle admet 2 valeurs propres distinctes.

Question 4 Soit A une matrice et λ une de ses valeurs propres.

A : FAUX La dimension du sous-espace propre associé à λ est 1 si et seulement si la multiplicité de λ est 1.

B : FAUX La matrice des cofacteurs de $A - \lambda I$ ne peut pas être nulle.

C : FAUX $(A - \lambda I)V = 0$ si et seulement si $V = 0$.

D : VRAI $(\lambda^2 - 1)$ est valeur propre de $(A - I)(A + I)$.

E : VRAI Deux lignes quelconques de la matrice des cofacteurs de $A - \lambda I$ sont soit nulles, soit proportionnelles entre elles.

Question 5 On considère la matrice A suivante : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

A : VRAI La matrice A admet trois valeurs propres distinctes.

B : FAUX La matrice A admet -1 pour valeur propre.

C : FAUX Le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A .

D : VRAI Le vecteur $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A .

E : FAUX A est semblable à $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Question 6 Soit A la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 3 \\ -8 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

A : FAUX Les colonnes de A sont linéairement indépendantes.

B : FAUX La matrice A admet trois valeurs propres distinctes.

C : VRAI Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre.

D : VRAI La matrice A n'est pas diagonalisable.

E : FAUX La matrice A est diagonalisable.

Question 7 On considère la matrice suivante $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

A : FAUX 5 est une valeur propre de A .

B : VRAI Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A .

C : FAUX Le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A .

D : FAUX La matrice A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

E : VRAI La matrice $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2^{n+1} + 2 \cdot 3^n & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix}$

Question 8 On considère les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$(1) \begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n & \text{avec} & u_0 = 2 \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n & & v_0 = 1 \end{cases}$$

A : VRAI Le système (1) peut s'écrire sous la forme $U_{n+1} = AU_n$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

et $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

B : FAUX La matrice associée au système (1) n'est pas diagonalisable

C : FAUX La matrice associée au système (1) est semblable à $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

D : FAUX Le système (1) n'admet pas de solution.

E : VRAI Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5 \cdot 2^n - 3^{n+1}$ et $v_n = -5 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^{n+1}$.

Question 9 On considère la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

A : FAUX Les lignes de A sont des vecteurs indépendants.

B : VRAI La matrice A admet trois valeurs propres distinctes.

C : FAUX La matrice A admet deux valeurs propres réelles.

D : FAUX Le vecteur $\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre.

E : VRAI La matrice A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ où $\begin{cases} \alpha = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2} \\ \beta = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Question 10 Soit A la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$

A : FAUX Le produit des valeurs propres de A est i .

B : FAUX A admet une valeur propre réelle.

C : VRAI Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ i - 2 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A .

D : VRAI Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-5}{i+2} \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A .

E : FAUX Le carré de la matrice A est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.