Université René Descartes – Paris 5
UFR de Mathématiques et Informatique

Mathématiques et Calcul : examen, 24 mai 2005

L1 : Licence sciences et technologies,
mention mathématiques, informatique et applications

Nombre de pages de l'énoncé : 4. Durée 1 heure 30 minutes.

NB : L'examen se compose de 10 questions indépendantes. Pour chaque question 5 affirmations sont proposées, parmi lesquelles 2 sont vraies et 3 sont fausses. Pour chaque question, indiquez sur votre copie les lettres des 2 affirmations que vous pensez vraies. Chaque question pour laquelle les 2 affirmations vraies sont données rapporte 2 points.

Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.

SUJET 1

Question 1

A : VRAI. Si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum \dfrac{u_n}{n}$ converge.

B : FAUX. Si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum n\, u_n$ converge.

C : VRAI. Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors la série $\sum u_n^2$ converge.

D : FAUX. Si la suite (u_n) tend vers 0, alors la série $\sum u_n$ converge.

E : FAUX. Si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum u_n^2$ converge.

Question 2 Dans cette question on considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'(t) = y(t)/t^2 + 1/t^2.$$

A : FAUX. $y(t) = 1 - e^{-1/t}$ est solution de (E) sur $]-\infty, 0[$.

B : FAUX. $y(t) = 2e^{1/t}$ est solution de (E) sur $]0, +\infty[$.

C : VRAI. $y(t) = -1 + e^{-1/t}$ est solution de (E) sur $]0, +\infty[$.

D : FAUX. $y(t) = 2e^{-1/t}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

E : VRAI. La solution de (E) sur $]0, +\infty[$ vérifiant $y(1) = -1$ est constante.

Question 3 On définit la fonction f qui à $t \in \mathbb{R}$, associe $f(t) = \dfrac{t}{t^2+1}$.

A : VRAI. Soit g une fonction définie et continue sur $[0,2]$ telle que $\displaystyle\int_0^2 |g(t)| f(t)\, dt = 0$. Alors pour tout $t \in [0,2]$, $g(t) = 0$.

B : FAUX. $\displaystyle\int_0^2 f(t)\, dt > \int_0^2 t\, dt.$

C : FAUX. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$ est une somme de Riemann associée à f sur l'intervalle $[0,2]$.

D : FAUX. $\displaystyle\int_0^2 f(t)\, dt = \ln(5).$

E : VRAI. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2+k^2}$ tend vers $\displaystyle\int_0^2 f(t)\, dt$ quand n tend vers l'infini.

Question 4

A : VRAI. La série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n\ln(n)}$ converge.

B : FAUX. La série $\displaystyle\sum \frac{(1+\cos(n))(n^2+1)}{(\ln(n))^2\sqrt{n^6+2n+3}}$ diverge.

C : VRAI. La série $\displaystyle\sum \frac{2^n \sin(1+\sqrt{n})}{n!}$ converge.

D : FAUX. La série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n\ln(n)}(1+(-1)^n)$ converge.

E : FAUX. La série $\displaystyle\sum \frac{2^n+n}{n^2 2^n}$ diverge.

Question 5 On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2+y^2-\dfrac{1}{2}xy$.

A : VRAI. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) = 2.$

B : VRAI. Le gradient de f au point (a,b) est $\begin{pmatrix} 2a - b/2 \\ 2b - a/2 \end{pmatrix}$.

C : FAUX. La matrice hessienne de f au point $(0,0)$ est la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 1/2 & 2 \end{pmatrix}$.

D : FAUX. $(1,1)$ est un minimum local de f.

E : FAUX. $(0,0)$ est un maximum local de f.

Question 6 Dans cette question on suppose que les a_n sont strictement positifs.

A : VRAI. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n\, z^n$ est $\dfrac{1}{2}$.

B : FAUX. Si R est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n\, z^n$, alors la série $\sum a_n\, R^n$ est convergente.

C : VRAI. Si R est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n\, z^n$, alors pour tout z tel que $|z| < R$, la série $\sum a_n\, z^n$ est absolument convergente.

D : FAUX. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n\, z^n$ est 2.

E : FAUX. Si $\sum a_n$ converge alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n\, z^n$ est égal à 1.

Question 7 Dans cette question on considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y''(t) = 6y'(t) - 9y(t).$$

A : FAUX. $y(t) = e^{3t} - te^{3t}$ est l'unique solution de (E) vérifiant $y(1) = 0$.

B : VRAI. $y(t) = e^{3t} - te^{3t}$ est une solution de (E) vérifiant $y(1) = 0$.

C : FAUX. 3 est racine simple de l'équation caractéristique associée.

D : VRAI. Toutes les solutions de (E) sont définies sur $\mathbb{R}$.

E : FAUX. $y(t) = t(e^t + e^{3t})$ est solution de (E).

Question 8 On définit la fonction f qui à $t \in \mathbb{R}$, associe $f(t) = \dfrac{1}{(t^2+4)^2}$. On pose $I = \displaystyle\int_0^2 f(t)\, dt$.

A : VRAI. L'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ converge.

B : FAUX. L'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ diverge.

C : VRAI. $I = \dfrac{1}{8}\left(\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{t^2+4}\, dt + \left[\frac{t}{t^2+4}\right]_0^2\right)$.

D : FAUX. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+u^2)^2}\, du$.

E : FAUX. $I > \frac{2}{4^2}$.

Question 9 On considère $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 - x\}$ et $I = \int_D x^2 y \, dxdy$.

A : FAUX. $I = \left(\int_0^1 x^2 \, dx\right) \left(\int_0^1 y \, dy\right)$.

B : VRAI. $I = \int_0^1 \frac{y(1-y)^3}{3} \, dy$.

C : VRAI. $I = \frac{1}{60}$.

D : FAUX. $I = \int_0^1 x^2 (1-x)^2 \, dx$.

E : FAUX. Le domaine D est un parallélogramme.

Question 10

A : VRAI. $\int_0^{+\infty} \sqrt{t+2} \, \sin\left(\frac{3}{(t+1)^2}\right) \, dt$ converge.

B : FAUX. $\int_e^{+\infty} \frac{\ln(\ln t)}{t} \, dt$ converge.

C : FAUX. $\int_{-\infty}^{+\infty} t^4 \exp(-t^2) \, dt$ diverge.

D : FAUX. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \, dt$ diverge.

E : VRAI. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^2}$ diverge.