Université René Descartes – Paris 5
UFR de Mathématiques et Informatique

Mathématiques et Calcul : rattrapage, 20 juin 2005

L1 : Licence sciences et technologies,
mention mathématiques, informatique et applications

Nombre de pages de l'énoncé : 4. Durée 1 heure 30.

NB : L'examen se compose de 10 questions indépendantes. Pour chaque question 5 affirmations sont proposées, parmi lesquelles 2 sont vraies et 3 sont fausses. Pour chaque question, indiquez sur votre copie les lettres des 2 affirmations que vous pensez vraies. Chaque question pour laquelle les 2 affirmations vraies sont données rapporte 2 points.

Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.

SUJET 1

Question 1 On définit la fonction f qui à $t \in]0, \pi[$, associe $f(t) = \dfrac{\cos(t)}{\sqrt{\sin(t)}}$.

A : (VRAI) L'intégrale de f sur $]0, \pi[$ converge.

B : (FAUX) Pour tout $x \in]0, \pi[$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = \int_{\pi - x}^{\pi} f(u)\,du$.

C : (FAUX) La fonction $t \mapsto \sqrt{\sin(t)}$ est une primitive de $f(t)$ sur $]0, \pi[$.

D : (FAUX) L'intégrale de f sur $]0, \pi/2]$ diverge.

E : (VRAI) L'intégrale de f sur $[\pi/4, \pi/2]$ est strictement positive.

Question 2 On définit la fonction f qui à $t \in [0, 1]$, associe $f(t) = \sqrt{t(2-t)}$. On pose: $I = \displaystyle\int_0^2 f(t)dt$.

A : (FAUX) Le changement de variable $t \mapsto u = t(2-t)$ est bijectif sur $[0, 2]$.

B : (VRAI) Le changement de variable $t \mapsto u = 2-t$ donne $\displaystyle\int_0^2 tf(t)\,dt = 2I - \int_0^2 tf(t)\,dt$.

C : (FAUX) Le changement de variable $t \mapsto v = t - 1$ donne $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - v^2}\,dv$.

D : (FAUX) f admet une primitive définie sur $\mathbb{R}$.

E : (VRAI) $I = \dfrac{\pi}{2}$.

Question 3

A : (FAUX) La série $\sum \dfrac{n^2+1}{\ln(n)\sqrt{n^4+2}}$ converge.

B : (FAUX) La série $\sum \dfrac{n+1}{\ln(n)\sqrt{n^4+2}}$ converge.

C : (VRAI) La série $\sum \dfrac{n^2+1}{\ln(n)\sqrt{n^8+2}}$ converge.

D : (VRAI) La série $\sum \dfrac{n^2+1}{(\ln(n))^2\sqrt{n^6+2}}$ converge.

E : (FAUX) La série $\sum \dfrac{n^2+1}{\ln(n)\sqrt{n^3+2}}$ converge.

Question 4 On définit la fonction f qui à $t \in \mathbb{R}$, associe $f(t) = \dfrac{t^2+1}{(t+3)(t^2-4)}$.

A : (VRAI) La décomposition en éléments simples de f a la forme suivante:
$f(t) = \dfrac{A}{t+3} + \dfrac{B}{t+2} + \dfrac{C}{t-2}$.

B : (FAUX) Une primitive de $f(t)$ est $\ln(|(t+3)(t+2)^5(2-t)|)$.

C : (FAUX) f a une primitive définie sur $\mathbb{R}$.

D : (VRAI) $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\cos^2(u))\sin(u)}{(3+\cos(u))(\cos^2(u)-4)}\,du.$

E : (FAUX) $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-3u}+e^{-u}}{(e^{-u}+3)(4-e^{-2u})}\,du.$

Question 5

A : (FAUX) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1$

B : (VRAI) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$

C : (FAUX) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1$

D : (FAUX) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 1$

E : (VRAI) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$

Question 6

A : (VRAI) La série $\sum \dfrac{(n!)^3}{(3n)!}$ converge.

B : (FAUX) La série $\sum \dfrac{1}{3n+1}$ converge.

C : (FAUX) La série $\sum \dfrac{n!}{3^n}$ converge.

D : (FAUX) La série $\sum \dfrac{(3n)!}{(n!)^3}$ converge.

E : (VRAI) La série $\sum \dfrac{3^n}{n!}$ converge.

Question 7 Dans cette question on considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'(t) = \frac{2t-1}{t^2} y(t) + 1.$$

A : (FAUX) $y(t) = t^2(1 + e^{-1/t})$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

B : (FAUX) $y(t) = 2t^2 e^{1/t}$ est solution de (E) sur $]0, +\infty[$.

C : (VRAI) $y(t) = t^2$ est solution de (E) sur $]-\infty, 0[$.

D : (FAUX) $y(t) = t^2(1 - e^{1/t})$ est solution de l'équation homogène associée à (E).

E : (VRAI) $y(t) = t^2(1 - e^{1/t})$ est solution de (E) sur $]0, +\infty[$.

Question 8 Dans cette question on considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y''(t) = 2y'(t) - 5y(t).$$

A : (FAUX) $y(t) = e^t$ est l'unique solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$.

B : (VRAI) $y(t) = e^t \cos(2t)$ est une solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$.

C : (FAUX) L'équation caractéristique associée a deux racines réelles.

D : (VRAI) Pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$, $y(t) = e^t \sin(2t - \varphi)$ est solution de (E).

E : (FAUX) $y(t) = e^t \sin(t)$ est solution de (E).

Question 9 On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2y^2$.

A : (VRAI) Le gradient de f au point $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ est nul.

B : (FAUX) La différentielle de f au point $(0,0)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

C : (VRAI) La matrice hessienne de f au point $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ est la matrice $\dfrac{9}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

D : (FAUX) $(0,0)$ est un minimum local de f.

E : (FAUX) $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ est un maximum local de f.

Question 10 On considère $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < x < 1,\ x-1 < y < x\right\}$ et $I = \displaystyle\int_D xy^2\, dxdy$.

A : (FAUX) $I = \left(\displaystyle\int_0^1 x\, dx\right)\left(\displaystyle\int_0^1 y^2\, dy\right)$.

B : (VRAI) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{y^2 - y^4}{2}\, dy + \int_{-1}^0 \frac{y^2(y+1)^2}{2}\, dy$.

C : (VRAI) $I = \dfrac{1}{12}$.

D : (FAUX) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{3} x(x-1)^3\, dx$.

E : (FAUX) Le domaine D est un triangle.